

Circunferencias y ángulos

Olimpiadas Colombianas de Matemáticas*
para www.colombiaaprende.edu.co

2005

1. Introducción

El tema a tratar en este artículo será la circunferencia y algunos ángulos especiales asociados a ella. Para facilitar la fluidez del tema dentro del artículo, se hará una introducción a algunos de los temas básicos que se utilizarán durante las demostraciones.

1. **Ángulos y sus medidas.** Un ángulo se define como la apertura entre dos semirrectas. Esto quiere decir que si dos rectas se cortan en un punto P , sobre una de ellas se ubica un punto A y sobre la otra un punto B , el ángulo $\angle APB$ (se utiliza el punto de corte de las rectas entre las otras dos letras) será la rotación alrededor de P necesaria para obtener la semirrecta PA sobre la recta PB o viceversa. Es común asumir que la medida de un ángulo es, a menos que se indique lo contrario, menor que la medida de media vuelta; es decir, si se puede pasar de la semirrecta PA a la semirrecta PB dando un cuarto de vuelta o tres cuartos de vuelta, se asumirá que el ángulo $\angle APB$ es de un cuarto de vuelta.

Para medir la magnitud de un ángulo existen diferentes escalas, entre las más conocidas los radianes, los grados centesimales y los grados sexagesimales. La escala que se usará durante este artículo será la de grados sexagesimales (aunque la mayor parte de los resultados mostrados son independientes de la magnitud de los ángulos), que generalmente se denotan por la magnitud seguida del símbolo $^\circ$, en forma similar a la escala Celsius de medición de temperatura. En grados sexagesimales, una vuelta completa tiene una medida de 360° y por lo tanto media circunferencia tiene una medida de 180° . Esto quiere decir que si tres puntos X, Y, Z están en una misma línea, con Y ubicado entre X y Z , el ángulo $\angle XYZ$ tendrá una medida de 180° y el ángulo $\angle YXZ$ tendrá una medida de 0° .

2. **Propiedades básicas de los ángulos.** Considérese una figura como la que se muestra a continuación:

*Preparado por Oscar Bernal, miembro del comité organizador de las [Olimpiadas Colombianas de Matemáticas](http://www.colombiaaprende.edu.co), para el portal www.colombiaaprende.edu.co

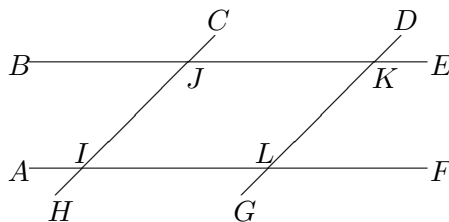


Figura 1: Dos parejas de líneas paralelas en posición cruzada

En esta figura las rectas DG y CH son paralelas, al igual que son paralelas las rectas AF y BE . Los puntos i, J, K, L son puntos de intersección entre ellas.

Las siguientes son propiedades de los ángulos, según la notación de la figura:

- a) **Ángulos suplementarios.** Dos ángulos se denominan *suplementarios* si comparten el vértice y una de las semirrectas, mientras las semirrectas no compartidas forman una recta en las dos direcciones. En términos simples, dos ángulos son suplementarios si comparten un lado y al retirar ese lado se obtiene una recta. Ejemplos de ángulos suplementarios en la figura son, entre otros, $\angle BJI$ y $\angle IJK$ o $\angle JKD$ y $\angle DKE$.
- b) **Ángulos opuestos por el vértice.** Los ángulos $\angle AIH$ y $\angle LIJ$ son iguales, propiedad conocida como *opuestos por el vértice*. Esto quiere decir que su vértice es el mismo, es decir, el punto de intersección entre las semirrectas en cada caso es el mismo (el punto I para este caso particular) y las semirrectas se pueden unir por parejas para formar dos rectas completas, como sucede en este caso con las semirrectas AI e IL y las semirrectas HI e IJ .
Nótese que en la misma forma los ángulos $\angle AIJ$ y $\angle LIH$ son opuestos por el vértice, así como los ángulos $\angle BJC$ y $\angle KJI$ o los ángulos $\angle KLF$ y $\angle GLA$, por solamente mencionar dos ejemplos.
- c) **Ángulos correspondientes.** Dos ángulos se denominan *correspondientes* si, dadas dos líneas paralelas y una transversal a ellas, los dos ángulos están al mismo lado de la transversal, cada uno toma una parte de una de las paralelas y están al mismo lado de su paralela respectiva. Como ejemplos de ángulos correspondientes se tienen los ángulos $\angle AIC$ y $\angle BJC$ así como los ángulos $\angle DLF$ y $\angle JIL$.
- d) **Ángulos alternos internos entre paralelas.** Los ángulos $\angle KLF$ y $\angle LKJ$ son iguales por la propiedad de *ángulos alternos internos entre paralelas*. Se denomina de esa forma porque los ángulos están en lados opuestos de la recta KL y están en la región interior a las líneas paralelas AF y BE . Otro ejemplo de ángulos alternos internos entre paralelas en la figura mostrada es la pareja de ángulos formada por $\angle KJI$ y $\angle JIA$.
- e) **Ángulos alternos externos entre paralelas.** Una propiedad mu similar a la enunciada anteriormente, donde la diferencia radica en que en este caso los ángulos deben ser exteriores a la región delimitada por las paralelas. Así, son *ángulos alternos externos entre paralelas* los ángulos $\angle DKE$ y $\angle ALG$ o los ángulos $\angle BJC$ y $\angle HIF$.

3. **Suma de los ángulos interiores de un triángulo.** Se utilizará que la suma de los

ángulos internos de un triángulo es 180° . Para demostrar esto considérese la siguiente figura, donde la línea XY es paralela al lado AB :

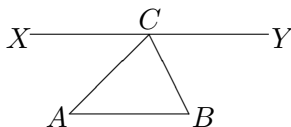


Figura 2: Construcción auxiliar - Suma de ángulos en un triángulo

Por ángulos alternos internos entre paralelas se tiene que $\angle ABC = \angle YCB$ y que $\angle CAB = \angle ACX$. Así, la suma de los ángulos interiores del triángulo ABC será

$$\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = \angle YCB + \angle BCA + \angle ACX = 180^\circ$$

como se quería demostrar.

4. **Semejanza de triángulos.** Dos triángulos se llaman *semejantes* si corresponden a figuras idénticas en diferente escala, es decir, si sus lados son proporcionales. Por ejemplo, si un triángulo tiene lados de longitudes 4, 5, 6 y otro triángulo tiene lados de longitudes 12, 15, 18, estos dos triángulos serán semejantes ya que

$$\frac{12}{4} = \frac{15}{5} = \frac{18}{6},$$

mientras que si en el segundo triángulo los lados fueran 12, 15, 17 la semejanza no podría darse, aunque dos de las tres proporciones se mantengan iguales entre sí.

Los siguientes son otros criterios para determinar si dos triángulos son semejantes. Se utilizará la notación A para hablar de ángulos iguales y P para hablar de proporciones iguales, aunque no existe una notación estándar en este caso.

- **Criterio $A - A - A$.** Si dos triángulos tienen el mismo trío de ángulos entonces serán semejantes. En realidad es suficiente con garantizar que dos de sus ángulos sean iguales, ya que esto garantiza que el tercer ángulo sea también igual porque la suma de los ángulos de un triángulo es 180° . En este criterio, las proporciones entre los lados para formar la semejanza estarán cada una conformada por los lados opuestos a ángulos del mismo valor en cada triángulo.
 - **Criterio $P - A - P$.** Cuando dos triángulos cumplen que dos parejas de sus lados tienen la misma proporción y además el ángulo que se forma en cada triángulo entre los lados utilizados es igual, los triángulos serán semejantes. Nuevamente debe aclararse que en las igualdades deben usarse en cada ocasión ángulos diferentes.
5. **Triángulos isósceles.** Un triángulo isósceles es un triángulo que tiene dos de sus lados de la misma longitud. Se utilizará que en un triángulo isósceles los ángulos opuestos a los lados iguales tienen magnitudes iguales.

Una vez hecha la introducción de los conceptos que se utilizarán durante la presentación de los resultados siguientes, se enunciarán y demostrarán los teoremas centrales de este artículo: teorema del ángulo inscrito (también conocido como teorema del arco capaz), potencia de puntos y teorema de Ptolomeo.

2. Teorema del ángulo inscrito

Sean A, B, C tres puntos sobre una circunferencia de centro O . Se demostrará que el ángulo $\angle ABC$ tiene la mitad de la magnitud del ángulo $\angle AOC$ que no contiene a B . En este caso particular es posible que el ángulo $\angle AOC$ tenga una medida de más de 180° , cuando los tres puntos A, B, C están ubicados en una semicircunferencia.

Para la demostración de este resultado se utilizarán tres casos: Si el punto O está en uno de los segmentos AB o BC , si es interior al ángulo $\angle ABC$ o si es exterior a dicho ángulo. Obsérvense las siguientes figuras para ejemplificar los casos:

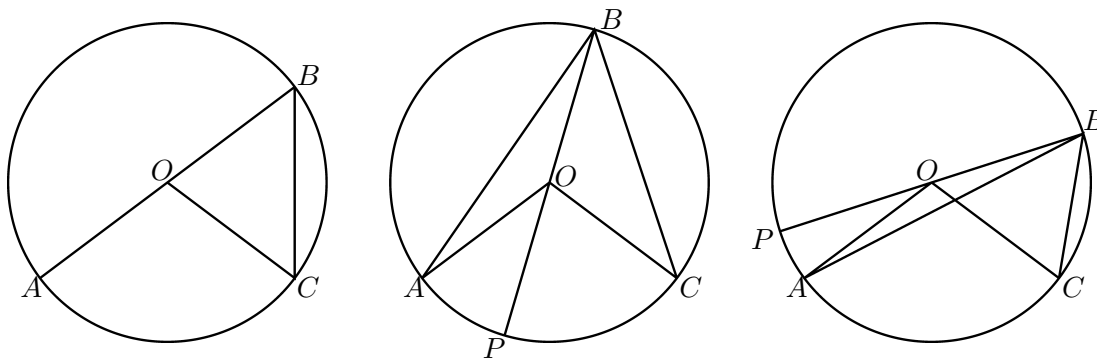


Figura 3: Ángulo inscrito. Izquierda: Caso 1 - Centro: Caso 2 - Derecha: Caso 3

- Caso 1:** Supóngase que el ángulo $\angle AOC$ tiene medida 2α . Por ángulos suplementarios, el ángulo $\angle BOC$ tendrá medida $180^\circ - 2\alpha$, por lo que los ángulos $\angle OBC$ y $\angle OCB$ deben sumar 2α para completar los 180° de la suma de los ángulos internos del triángulo BOC . Sin embargo, como OB y OC son radios de la circunferencia deben tener longitudes iguales y, por lo tanto, el triángulo BOC es isósceles, de donde los ángulos $\angle OBC$ y $\angle OCB$ deben ser iguales, lo que a su vez lleva a concluir que tienen magnitud α para que su suma sea 2α . Se concluye entonces que

$$\angle ABC = \angle OBC = \alpha = \frac{2\alpha}{2} = \frac{\angle AOC}{2}$$

como se quería demostrar.

- Caso 2:** En la figura ejemplo para el caso 2 se ha añadido el diámetro de la circunferencia que pasa por el punto B , denominando P su otro extremo. Nótese que $\angle AOC = \angle AOP + \angle POC$ y que $\angle ABC = \angle ABP + \angle PBC$. Además, como consecuencia del caso 1, que ya fue demostrado, $\angle ABP = \frac{\angle AOP}{2}$ y $\angle PBC = \frac{\angle POC}{2}$. Uniendo los resultados se llega a

$$\angle ABC = \angle ABP + \angle PBC = \frac{\angle AOP}{2} + \frac{\angle POC}{2} = \frac{\angle AOC}{2}$$

que es la conclusión buscada.

- Caso 3:** Al igual que en el caso 2, se ha agregado el diámetro de la circunferencia a través de B , denominando su otro extremo como P . En este caso se tiene que $\angle AOC =$

$\angle POC - \angle AOP$ y $\angle ABC = \angle PBC - \angle ABP$ y por el caso 1 también se tiene que $\angle ABP = \frac{\angle AOP}{2}$ y $\angle PBC = \frac{\angle POC}{2}$. Una combinación de estas deducciones lleva a

$$\angle ABC = \angle PBC - \angle ABP = \frac{\angle POC}{2} - \frac{\angle AOP}{2} = \frac{\angle AOC}{2}$$

lo que completa este tercer y último caso.

Completados los tres casos de la demostración, se deduce inmediatamente un corolario que será de gran utilidad para los teoremas que se mostrarán más adelante.

Corolario: Sean A, B, C, D puntos en una circunferencia, en ese orden en el sentido de las manecillas del reloj. Se cumple entonces que $\angle ABD = \angle ACD$.

Demostración: Sea O el centro de la circunferencia en la que están ubicados los puntos A, B, C, D . Por el teorema del ángulo inscrito se tiene que $\angle ABD = \frac{\angle AOD}{2}$ y que $\angle ACD = \frac{\angle AOD}{2}$, donde $\angle AOD$ representa siempre el mismo ángulo ya que B y C están al mismo lado del segmento AD . De esta forma, por la ley transitiva, $\angle ABD = \angle ACD$ como se quería demostrar.

3. Potencia de puntos

Considérese un punto P en el exterior de una circunferencia Γ de centro O y radio r . Se consideran dos líneas que pasan por el punto P y que se intersectan con Γ en los puntos W, X, Y, Z , donde P, W, X estén en una misma línea y P, Y, Z en otra línea, según se muestra en la figura.

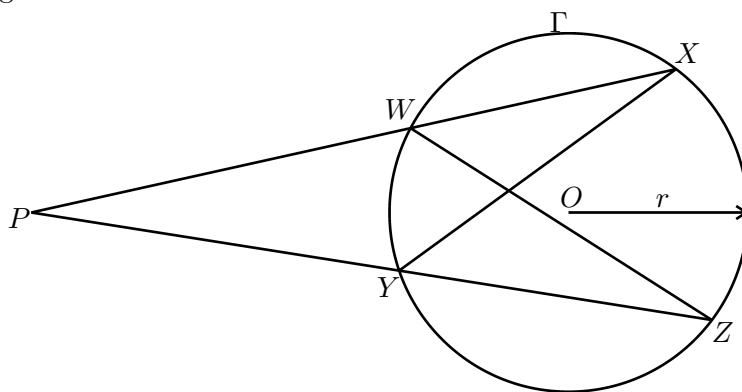


Figura 4: Potencia de puntos - Punto exterior

Se puede observar que los triángulos PWZ y PXY son semejantes, ya que comparten el ángulo $\angle WPY$ y los ángulos $\angle PXY$ y $\angle PZW$ son iguales por el teorema del ángulo inscrito. Así, $\frac{PX}{PZ} = \frac{PY}{PW}$ y por lo tanto $PW \cdot PX = PY \cdot PZ$. Como este producto es igual en los dos casos, y la demostración es independiente de la posición de los puntos W, X, Y, Z mientras se cumpla que P, W, X están alineados y P, Y, Z también, se puede afirmar en general que, para el punto P , si se traza una línea que pase por él y corta a la circunferencia Γ en dos puntos Q y R , el resultado de $PQ \cdot PR$ es constante y depende solamente de la posición de P .

Este resultado es también válido si P es un punto en el interior de la circunferencia Γ , como se probará a continuación.

Dados un punto P interior a la circunferencia Γ y dos cuerdas FG y HI que se cruzan en P , se demostrará que $PF \cdot PG = PH \cdot PI$. Para esto, considérese la siguiente figura:

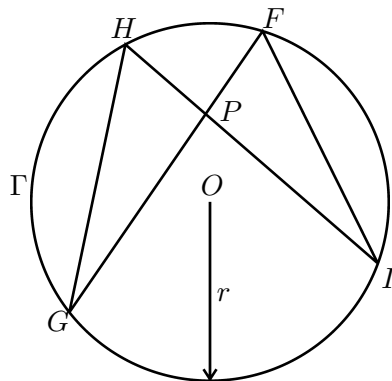


Figura 5: Potencia de puntos - Punto interior

En este caso, los triángulos PFI y PHG son semejantes, ya que los ángulos $\angle PFI$ y $\angle PHG$ son iguales por el teorema del ángulo inscrito, en la misma forma en que son iguales los ángulos $\angle PIF$ y $\angle PGH$. Se tiene entonces que $\frac{PF}{PH} = \frac{PI}{PG}$ y de aquí $PF \cdot PG = PH \cdot PI$, el resultado buscado.

4. Teorema de Ptolomeo

El teorema de Ptolomeo enuncia lo siguiente: Si A, B, C, D son puntos sobre una circunferencia que forman un cuadrilátero convexo, se cumple la igualdad

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD.$$

Demostración: En primer lugar, considérese la siguiente figura, correspondiente a los datos del enunciado, a la que se han añadido algunos elementos que se explicarán después de la figura:

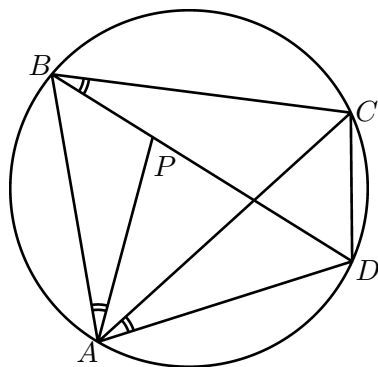


Figura 6: Construcción auxiliar - Teorema de Ptolomeo

Además de los puntos A, B, C, D y las líneas que los unen, se han agregado el punto P , ubicado sobre el segmento BD , y el segmento AP , construidos con la condición $\angle BAP = \angle CAD$.

Por el teorema del ángulo inscrito se sabe que $\angle DBA = \angle DCA$, $\angle ACB = \angle ADB$, $\angle BDC = \angle BAC$ y $\angle CAD = \angle CBD$ y que esta última pareja, por construcción, es igual a $\angle BAP$.

Al observar los triángulos BPA y CDA se concluye que estos son semejantes ya que $\angle BAP = \angle CAD$ y $\angle PBA = \angle DBA = \angle DCA$. Así, se debe cumplir $\frac{AB}{AC} = \frac{BP}{CD}$ y por lo tanto $AB \cdot CD = AC \cdot BP$.

Ahora, ya que $\angle BAP = \angle CAD$, se va a tener que $\angle DAB - \angle BAP = \angle DAB - \angle CAD$, es decir, $\angle DAP = \angle CAB$. Con esta igualdad y con $\angle ACB = \angle ADB = \angle ADP$ se tiene que los triángulos BCA y PDA son semejantes, por lo que $\frac{BC}{PD} = \frac{AC}{AD}$ y por lo tanto $BC \cdot AD = AC \cdot PD$.

Se obtiene entonces

$$\begin{aligned} AB \cdot CD &= AC \cdot BP \\ BC \cdot DA &= AC \cdot PD \end{aligned}$$

y por lo tanto, sumando,

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BP + AC \cdot PD = AC \cdot (BP + PD)$$

que es igual a

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD,$$

el resultado anunciado.