

Circunferencias y ángulos

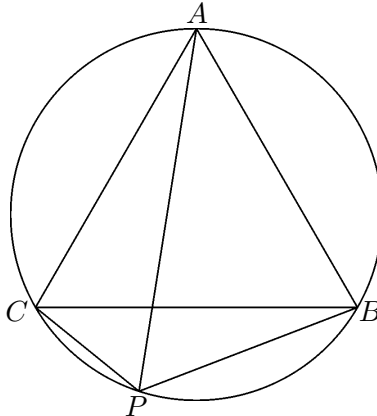
Segunda entrega

Olimpiadas Colombianas de Matemáticas*
para www.colombiaaprende.edu.co

2005

2. Sea ABC un triángulo equilátero y sea Γ la circunferencia que pasa por los puntos A, B, C . Sea P un punto de Γ . Demuestre que entre los segmentos AP, BP, CP se puede encontrar uno de ellos cuya longitud es igual a la suma de las longitudes de los otros dos.

Solución. Considérese la siguiente figura:



Según el Teorema de Ptolomeo, ya que el cuadrilátero $ABPC$ es concíclico, es decir, todos sus vértices están en una misma circunferencia, se tiene que

$$AB \cdot PC + CA \cdot PB = BC \cdot PA.$$

Debe recordarse sin embargo que el enunciado habla de un triángulo equilátero ABC , por lo que las longitudes AB, BC, CA son iguales entre sí. Sea entonces $\ell = AB = BC = CA$. La expresión obtenida a partir del Teorema de Ptolomeo se convierte entonces en

$$\ell \cdot PC + \ell \cdot PB = \ell \cdot PA$$

y, al cancelar ℓ en todas las multiplicaciones, en

$$PC + PB = PA.$$

Análogamente, si el punto P estuviera ubicado en el arco AB se tendría $PA + PB = PC$ y si el punto P estuviera en el arco CA se tendría $PC + PA = PB$. En cualquiera de los tres casos, la suma de dos de los segmentos es igual al tercero, como se pedía en el enunciado.

Más allá de este resultado, existe un problema muy similar que se deja abierto a los lectores para su consulta en textos de geometría o para ser trabajado y demostrado por medios propios. En referencia a la figura con que se inicial la solución de este problema, sea T el punto de intersección de PA y BC . Entonces se cumple

$$\frac{1}{PT} = \frac{1}{PB} + \frac{1}{PC}.$$