Aulas sin fronteras

Matemáticas 8

TERCER Y CUARTO BIMESTRE

GUÍA DEL ESTUDIANTE

GOBIERNO DE COLOMBIA

MINEDUCACIÓN

uncoli
UNION DE COLEGIOS INTERNACIONALES

Juan Manuel Santos Calderón
Presidente de la República

Yaneth Giha Tovar
Ministra de Educación Nacional

Liliana María Zapata Bustamante
Secretaria General con funciones de Viceministro de Educación Preescolar, Básica y Media (E)

Mónica Ramírez Peñuela
Directora de Calidad para la Educación Preescolar, Básica y Media

Camila Gómez Afanador
Subdirectora de Fomento de Competencias

Diego Pulecio Herrera
Subdirector de Referentes y Evaluación

Ana María Pérez Martínez
Coordinadora Aulas Sin Fronteras – MEN

Agradecimientos a los funcionarios del MEN que definieron e iniciaron este proyecto:
Gina Parody D'Echeona (Ministra de Educación Nacional 2014-2016)
Luis Enrique García de Brigard (Viceministro de Educación Preescolar Básica y Media 2014-2015)
Laura Patricia Barragán Montaña (Directora de Calidad para la Educación Preescolar Básica y Media 2014-2015)
Ana Bolena Escobar Escobar (Directora de Calidad para la Educación Preescolar Básica y Media 2015- 2016)
Paola Trujillo Pulido (Directora de Calidad para la Educación Preescolar Básica y Media 2016- 2017)

Equipo encargado de la construcción de las guías pedagógicas y material audiovisual de Octavo grado
Unión de Colegios Internacionales (UNCOLI)

Camilo París Anzola (Gimnasio La Montaña)
Coordinador Aulas Sin Fronteras

Andrea Constanza Perdomo Pedraza (Colegio Santa Francisca Romana)
Coordinadora Equipo de Matemáticas Aulas Sin Fronteras

Equipo de Matemáticas Aulas Sin Fronteras
Merly Abril Ochoa (Colegio Italiano Leonardo Da Vinci)
Claudia Yaneth Gómez Duque (Colegio Andino – Deutsche Schule)
Carlos Guerra Gómez (Colegio San Jorge de Inglaterra)
Juan Gabriel Malagón González (Voluntario)
Olga María Nagle Moreno (Institución Educativa Agrícola Diego Luis Córdoba)

……..
Segunda edición
Bogotá, D. C., enero 2018

Revisión de actividades (Estudiantes Colegio Santa Francisca Romana)
Camila González Cuervo (noveno grado)
Sofía Ochoa Mora (noveno grado)
Laura Alejandra Hernández Guerrero (noveno grado)
Alejandra Rangel Rosales (noveno grado)

Edición
Paulina Zuleta Jaramillo

Diseño y diagramación
Pauline López Sandoval (Centro de Innovación Educativa Regional – Centro)
Mónica Contreras Páez (Centro de Innovación Educativa Regional – Centro)

ISBN
978-958-785-011-6

Colegios UNCOLI participantes

Los siguientes colegios miembros de la Unión de Colegios Internacionales de Bogotá participaron en el proyecto, aportando el tiempo y experiencia de uno o más docentes, en el periodo 2016-2017:

Colegio Abraham Lincoln

Colegio Andino Deutsche Schule

Gimnasio Campestre Bogota

Colegio Campoalegre

Colegio Colombo Hebreo

Gimnasio Femenino

Colegio Helvetia de Bogotá

Colegio Italiano Leonardo Da Vinci

Marymount

Gimnasio La Montaña

Rochester School

Santa Francisca Romana

Saint George's School
Colegio San Jorge de Inglaterra

Santa María

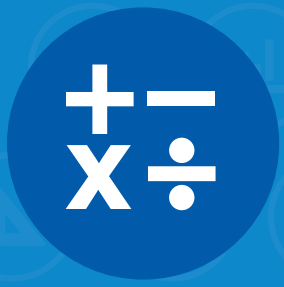
Gimnasio Vermont

Gobierno de España · Ministerio de Educación Cultura y Deporte · Embajada de España Agregaduría de Educación · Centro Cultural y Educativo Español "Reyes Católicos"

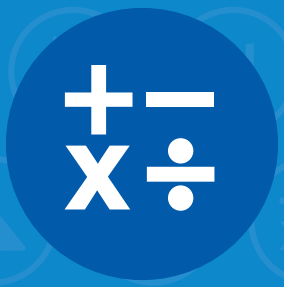
Con el apoyo de:

Colombia aprende
La red del conocimiento

DIRECTV ESCUELA



TERCER BIMESTRE



Clase 1 Esta clase tiene video

Tema: Factorización algebraica, factor común

Actividad 1

1 Lea y analice el ejemplo.

36	**2**	se inicia con el menor factor, en este caso es 2.
18	**2**	se divide y se repite el proceso.
9	**3**	9 ya no es divisible entre 2 sino entre 3.
3	**3**	se divide entre 3 hasta llegar a 1.
1		

La descomposición en factores primos de 36 es $2^2 \times 3^2$.

2 Factorice cada número natural.

a) 18

b) 147

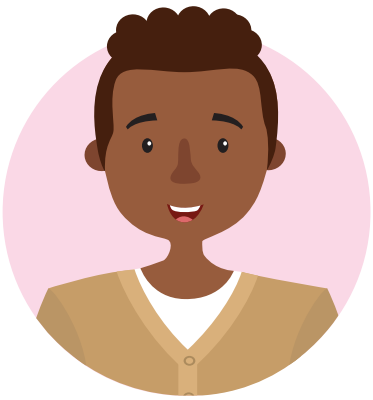
Actividad 2

Indique con una ✗ cuáles de las siguientes expresiones están factorizadas correctamente.

1. ☐ $125 = 5^3$
2. ☐ $60 = 6 \times 5 \times 2$
3. ☐ $144 = 3^2 \times 8 \times 2$

Actividad 3

El (m.c.d.) es el mayor de los divisores comunes de un conjunto de números naturales .



Calcule el máximo común divisor (m.c.d.) de cada grupo de números.

1. 27 y 33

2. 230, 80, 110 y 270

Actividad 4

El (m.c.m.) es el menor de los múltiplos comunes (diferente de 0), de un conjunto de números naturales.

Halle el mínimo común múltiplo (m.c.m.) de los siguientes grupos de números.

1. 2, 7 y 21

2. 12, 18 y 20

Actividad 5

Escriba el término que corresponde a cada descomposición factorial.

1. $3 \cdot 5 \cdot x =$ _____

2. $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x \cdot x \cdot y =$ _____

3. $7 \cdot 11 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b =$ _____

4. $13 \cdot 2 \cdot a \cdot b \cdot b \cdot c \cdot c \cdot c =$ _____

Actividad 6

En cada una de las multiplicaciones, escriba el factor que falta.

1. $24 \cdot \square = 312$
2. $3x^2 \cdot \square = 12x^5$
3. $2y \cdot \square \cdot 5xy = 30x^2y^4$
4. $\square \cdot a^2 \cdot 5c = 35a^2bc$

Actividad 7

Relacione los elementos de la columna de la izquierda con los de la columna de la derecha.

(m.c.d.) de $3x^2$, $9x$	xy
(m.c.m.) de $6x^2y$, $9xy^2$	$18x^2y^2$
(m.c.d.) de $5xyz$, $4xy$	$3x$
(m.c.m.) de $9x^2z$, $12xy$	$36x^2yz$

Actividad 8

Factorice la expresión que determina el área de cada rectángulo.

1. Área $= 2ab + 2ac + 2ad$

2. Área $= 4m^3y + 5x^2m - 8xmy$

Clase 2

Actividad 9

Realice los siguientes productos.

1. $5(x+2) =$ _____

2. $(w^2 + 3w - 5)(-4) =$ _____

3. $-1(3x - 4{,}2) =$ _____

Actividad 10

Encuentre el factor común entre las expresiones indicadas en cada caso.

1. $18p^3q^4,\ 6p^2q^3$

2. $48a^2b^4,\ 18a^3b^2,\ -24a^5b^3$

Actividad 11

Factorice los siguientes polinomios.

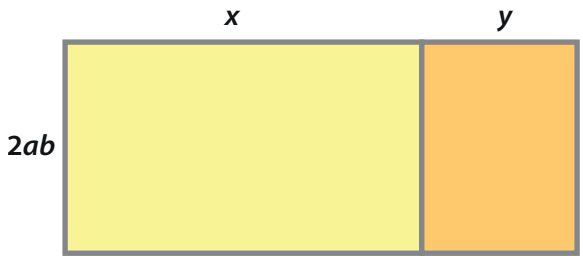
1. $8x^4 + 6x^3 - 4x^2$

2. $15ab + 3a^2b^3 + 9a^3b^2$

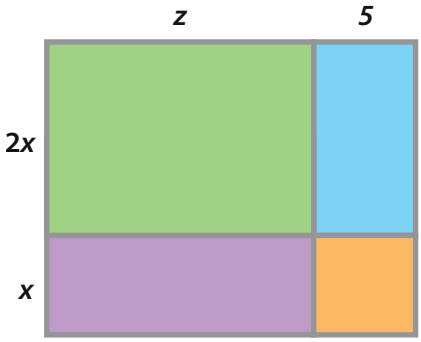
Actividad 12

Escriba en forma factorizada el polinomio que representa el área de cada figura.

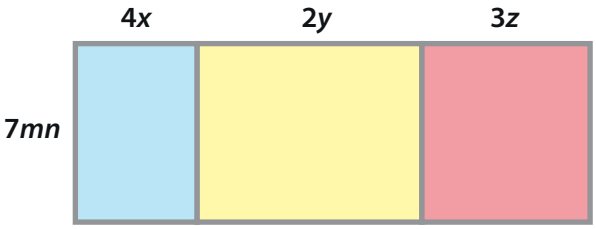
1



2



3



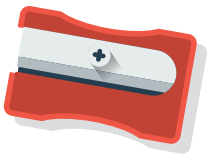
Actividad 13

Encuentre los términos que faltan en la factorización de cada polinomio.

1 $6x^2 + 15x = \square\,(2x + 5)$

2 $7m^4 + 21m^3n + 42m^2n^2 = \square\,(m^2 + \square + \square)$

3 $16a^2x^2 - 8ax^3 + \square = 8ax^2\,(\square - \square + 3a)$



Actividad 14

Complete la tabla:

Polinomio	Factor común
1 $-9x^3y^4z^2 + 45x^2yz + 25y^2z$	
2 $150m^2n^2 - 240mn^6 - 360m^3n^2$	
3 $25a^2bc + 30ab^2c - 60a^3bc^2$	

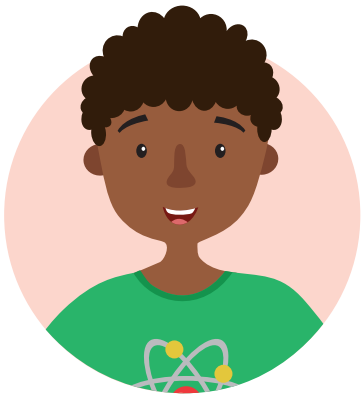
Actividad 15

Encuentre la palabra escondida calculando los siguientes productos. Luego complete la oración y lea su significado.

1. $3(2x - 4 + x) =$ _____
2. $(4x - 2 - x)3 =$ _____
3. $-3(4x - x + 2) =$ _____
4. $(-4x + x - 2)(-3) =$ _____

$9x - 6$ LÍN	$-9x - 6$ DRO
$9x + 6$ MO	$9x - 12$ PA
$9x + 12$ MA	$-9x - 12$ NO
$-9x + 12$ FA	$6x - 9$ LO

Un _____ es un número, palabra o frase que se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda.



Clase 3

Actividad 16

1 **Lea y analice el ejemplo.**

Halle el factor común de cada expresión y factorice por factor común polinomio.

$x(a+1)+y(a+1)=$	en este caso, el factor común polinomio es $(a+1)$, entonces la factorización del polinomio es
$(a+1)(x+y)$	

2 **Factorice los siguientes polinomios por factor común polinomio.**

a) $m(y+2)-3(y+2)=$

b) $x(a^2-b^2)+5(a^2-b^2)=$

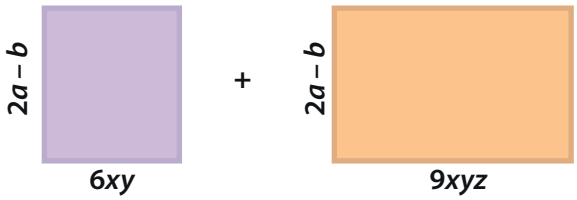
c) $a(x+3y)-b(x+3y)+c(x+3y)=$

d) $m^2+n-10-9(m^2+n-10)=$

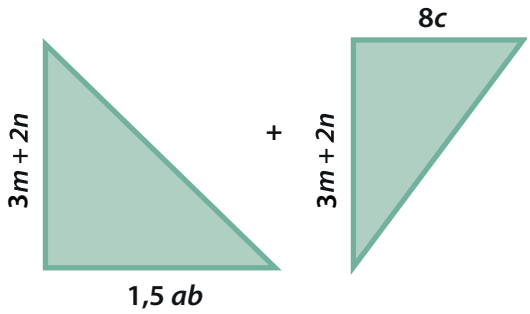
Actividad 17

Escriba en forma factorizada el polinomio que representa el área de cada grupo de figuras.

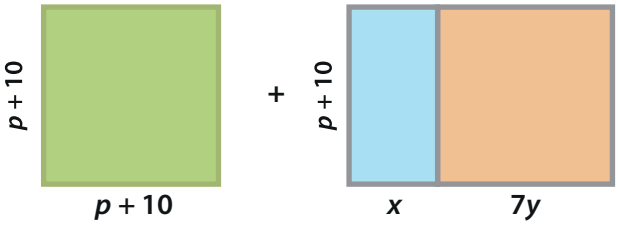
1



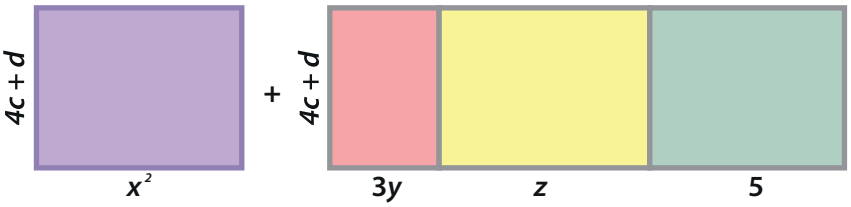
2



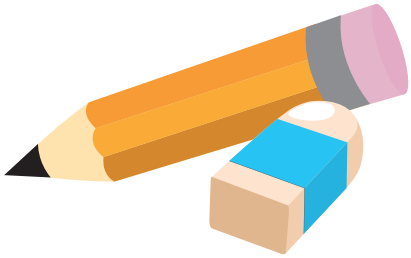
3



4



Actividad 18



Escriba los términos que faltan de manera que la igualdad sea verdadera.

1. $m\,(9 - t) + n^2\,(9 - t) = (9 - t)\,(_____)$

2. $x\,(x + y) - y\,(x + y) = (_____)\,(_____)$

3. $7\,(_____) + a\,(_____) = (2m - 8n)\,(_____)$

Actividad 19

Factorice los siguientes polinomios.

1. $3x(2x + 3) - 5(2x + 3) =$

2. $2u(3u - 8) - 3(3u - 8) + (3u - 8) =$

3. $10m^2n - 15mn^2 + 20mn =$

4. $7(x + 1) - y\,(x + 1) + 3z\,(x + 1) =$

Clase 4 Esta clase tiene video

Tema: Factor común por agrupación de términos

Actividad 20

1 **Lea la siguiente información.**

Para factorizar agrupando términos:

- **Se asocian términos que tengan un monomio común.**
- **Se factorizan estos términos buscando que queden polinomios comunes.**
- **Se factoriza el polinomio común.**

2 **Escriba las expresiones que faltan para completar el proceso de cada factorización.**

a) $mx + my - nx - ny =$

$m(x + y) - n($ _____ $) =$

$(m - n)($ _____ $)$

b) $8bc - 15ad - 10bd + 12ac =$

_____ $(4c - 5d) +$ _____ $(4c - 5d) =$

(_____) (_____)

c) $56b^2c - 21b^2 - 96a^2c - 36a^2 =$

$12a^2($ _____ $- 8c) - 7b^2($ _____ $) =$

(_____) (_____)

d) $21ap^2q^2 - 35bp^2q^2 + 9ar^2s^3 - 15br^2s^3 =$

_____ $(3a - 5b) +$ _____ (_____) $=$

(_____) (_____)

Actividad 21

Encuentre el polinomio que es factor común y factorice las siguientes expresiones.

1. $2a\,(x+3)+b(x+3)=$

2. $6a^2b(c-1)+11c\,(c-1)=$

3. $8x\,(u+v^2-w)+5y^2\,(u+v^2-w)=$

4. $(a-b+c)4xy-(a-b+c)5+(a-b+c)w=$

Clase 5

Actividad 22

Factorice los siguientes polinomios.

1. $6x^3 + 2x - 3x^2 - 1 =$

2. $2bx + cy + cx + 2by =$

3. $b^4 - b^3 + 3b - 3 =$

4. $3x^2 + 18xy - 2x - 12y =$

Actividad 23

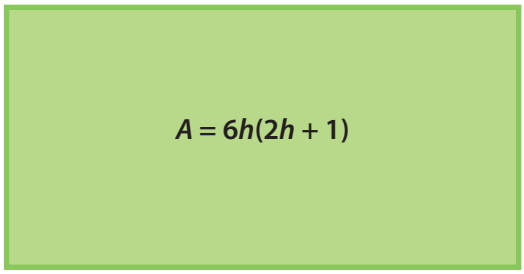
Encuentre una expresión algebraica para determinar las dimensiones de un terreno rectangular que tiene el área dada en cada expresión.

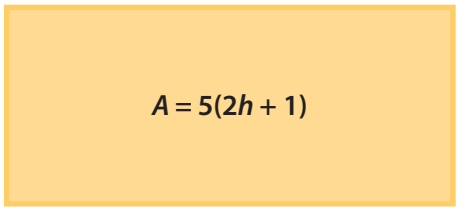
1. $ax^2 + 2ax - 3a + bx^2 + 2bx - 3b$

2. $2t^2 + 8t - 20 - 5t$

Actividad 24

1 **Observe el ejemplo en el cual se determina, en forma factorizada, la diferencia entre las áreas de los rectángulos dados.**





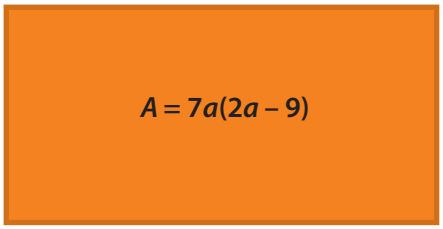
Para determinar la diferencia entre las áreas, reste el área del rectángulo pequeño del área del rectángulo grande.

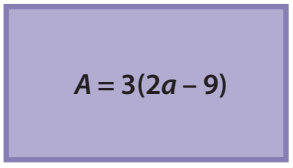
$6h(2h + 1) - 5(2h + 1)$ → Restar las áreas

$= (2h + 1)(6h - 5)$ → Factorizar $(2h + 1)$

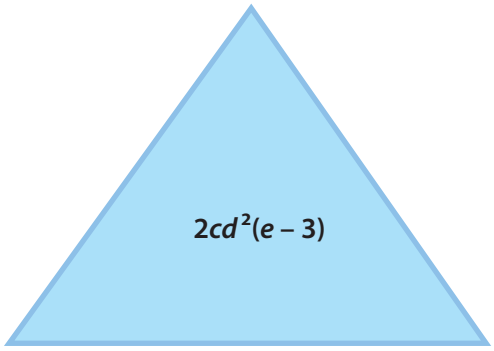
2 **Determine una expresión, en forma factorizada, para calcular la diferencia entre las áreas, teniendo en cuenta el ejemplo anterior.**

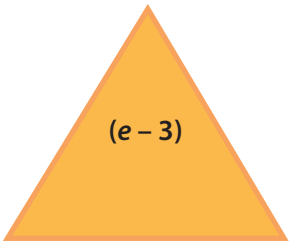
a)





b)





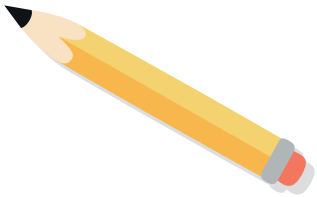
Clase 6 Esta clase tiene video

Tema: Diferencia de cuadrados perfectos

Actividad 25

Encuentre la raíz cuadrada de los siguientes términos.

Término	Raíz cuadrada
1 $121w^4$	
2 $169m^6n^8$	
3 $\dfrac{4t^2u^{14}}{9v^{12}}$	
4 $(x-2y)^2$	
5 $(9+b^2)^4$	



Actividad 26

1 **Lea la siguiente información.**

La **diferencia de cuadrados** perfectos se factoriza como la suma de las raíces cuadradas de los dos términos, por la diferencia de las raíces cuadradas de los términos.

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

2 **Escriba en los espacios las expresiones adecuadas al factorizar las diferencias de cuadrados.**

a) $m^2 - n^2 = (m + _____)(_____)$

b) $x^4 - y^6 = (x^2 - _____)(_____ + y^3)$

c) $144a^{12} - _____ = (_____ + 16b^6)(_____)$

d) $_____ - _____ = (4c - _____)(_____ + 7d)$

e) $100x^2y^8 - 81 = (10xy^4 - _____)(_____ + _____)$

Actividad 27

Factorice las siguientes diferencias de cuadrados perfectos.

1. $r^{16} - z^4 =$

2. $400p^6 - 256q^4 =$

3. $\frac{1}{m^8} - 9 =$

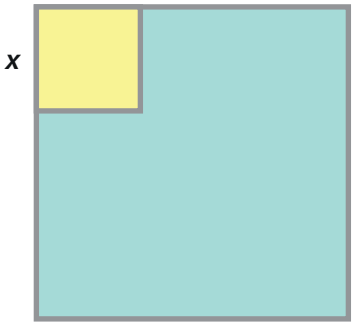
4. $289 - \frac{4}{81} y^{10}z^{20} =$

5. $(7a + 3b)^2 - (a - 2b)^2 =$

6. $(5u - 8)^2 - (3u + 4)^2 =$

Actividad 28

A un cuadrado de 10 cm de lado se le recorta una esquina con forma de cuadrado de lado x, como se muestra en la figura:



1. Escriba la expresión que representa el área de la figura que se obtiene.

2. ¿Cuáles serían las dimensiones de un rectángulo con esa área?

Clase 7

Tema: Suma y diferencia de cubos perfectos

Actividad 29

En la siguiente tabla aparecen algunos monomios que son cubos perfectos y sus correspondientes raíces cúbicas. Complete la tabla.

Término	¿Tiene raíz cúbica?	Raíz cúbica
1 x^3	Sí	x
2 w^5	No	
3 $-27x^6y^9z^{21}$		
4 $a^3b^6c^2$		
5 $\frac{1}{8}wx^{24}$		
6 $\frac{1000}{64}p^{19}o^3$		

Actividad 30

Encierre en un círculo aquellos binomios que están compuestos por cubos perfectos.

1. $1 + 27b^3$
2. $121 - 64b^6d^9$
3. $729p^{12} + 343q^{15}$
4. $\frac{8}{27}s^9 - 1$
5. $216t^{21} + \frac{3}{512}u$

Un **cubo perfecto** es toda expresión que tiene raíz cúbica exacta

Actividad 31

1 **Lea la siguiente información y complete los espacios que faltan en los procedimientos al factorizar diferencia o las sumas de cubos perfectos, teniendo en cuenta que:**

Para factorizar una **diferencia de cubos perfectos**

- Se extrae la raíz cúbica de cada término y se forma una **diferencia** con estas raíces.
- Luego, se forma un trinomio con la raíz cúbica del primer término elevada al cuadrado **más** el producto de las dos raíces cúbicas, **más** el cuadrado de la segunda raíz cúbica.

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

2 **Complete las factorizaciones:**

a) $m^3 -$ _____ $= (m -$ _____ $)(m^2 +$ _____ $+ 4)$

b) _____ $- 27 = (a^2 - 3)($_____ $+ 3a^2 +$ _____ $)$

c) $64c^{12} - 125 = ($_____ $- 5)($_____ $+$ _____ $+$ _____ $)$

Actividad 32

1 **Lea la siguiente información.**

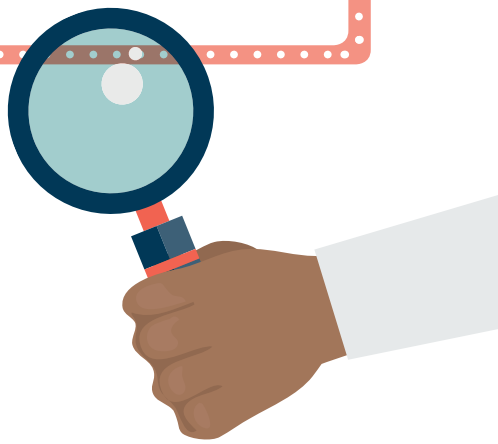
Para factorizar una **suma de cubos perfectos**

- Se extrae la raíz cúbica de cada término y se forma una **suma** con estas raíces.
- Luego, se forma un trinomio con la raíz cúbica del primer término elevada al cuadrado **menos** el producto de las dos raíces cúbicas, **más** el cuadrado de la segunda raíz cúbica.

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Observe el ejemplo

$$64a^3 + 125b^9 = (4a + 5b^3)\,(16a^2 - 20ab^3 + 25b^6)$$



2 **Factorice las siguientes expresiones.**

a) $a^6 + b^3 =$

b) $8 + 343x^{12} =$

c) $512h^9 + i^3 =$

d) $\frac{125}{64}s^{15} + 1 =$

Actividad 33

1 **Factorice cada expresión y encuentre las dimensiones de los siguientes rectángulos, teniendo en cuenta su área.**

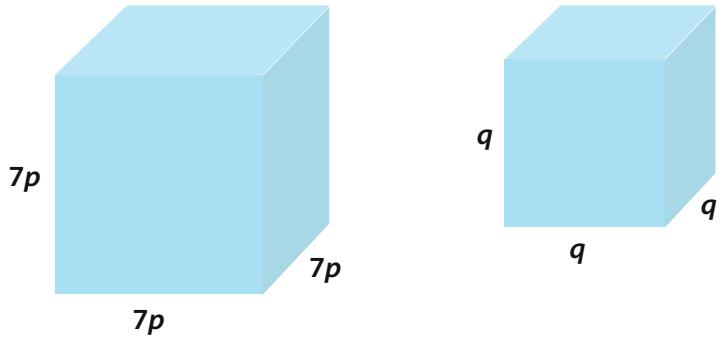
a)

$$A = 64c^{12} - 125d^3$$

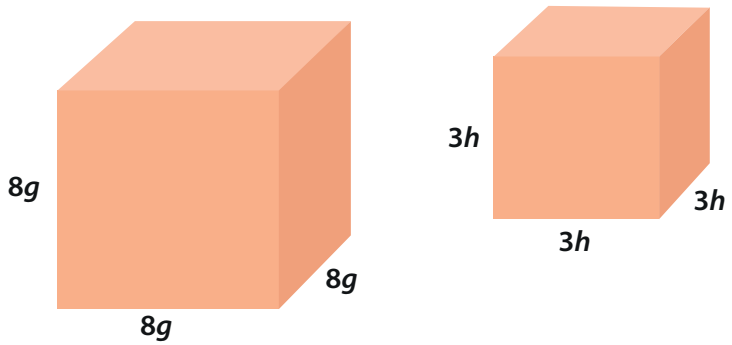
b)

$$A = a^9 + \frac{729}{343}d^3$$

2 **Determine una expresión factorizada, para calcular la suma de los volúmenes de cada pareja de cubos.**



3 **Determine una expresión factorizada, para calcular la diferencia de los volúmenes de cada pareja de cubos.**



Clase 8 Esta clase tiene video

Tema: Factorización de un trinomio cuadrado perfecto

Actividad 34

1 **Observe la estrategia para identificar si un trinomio es cuadrado perfecto.**

$$x^2 - 6x + 9$$

Para factorizar agrupando términos:

- **Raíz cuadrada de x^2 es exacta: $\sqrt{x^2} = x$**
- **Raíz cuadrada de 9 es exacta: $\sqrt{9} = 3$**
- **El doble de la primera raíz por la segunda raíz es el segundo término del trinomio. $2 \cdot x \cdot 3 = 6x$**
- **El primer y el tercer términos son positivos.**

2 **Siga el proceso planteado en la actividad anterior e identifique cuáles de los siguientes trinomios son cuadrados perfectos.**

a) $m^2 - 8m + 25$

b) $x^2 + 12xy + 36y^2$

c) $t^2 + 2t - 1$

d) $x^2 + 6x + 9$

e) $25a^2 + 30ab + 9b^2$

f) $9b^2 - 12bc + 16c^2$

Actividad 35

Escriba el término que reemplaza el ? en cada expresión, de tal manera que se convierta en un trinomio cuadrado perfecto.

1. $x^2 + 10x + ?$

2. $9y^2 + ? + 1$

3. $a^2 + 4a + ?$

4. $4m^2 - ? + 9n^2$

Actividad 36

Una cada trinomio cuadrado perfecto con su correspondiente factorización.

$m^2 - 10m + 25$	$(m + 6n)^2$
$m^2 + 12mn + 36n^2$	$(3m - 4n)^2$
$25m^2 + 30mn + 9n^2$	$(5m + 3n)^2$
$9m^2 - 24mn + 16n^2$	$(m - 5)^2$

Actividad 37 – Tarea

Factorice los siguientes trinomios cuadrados perfectos.

No olvide que los trinomios deben estar ordenados y el primer y tercer términos deben ser positivos.

1. $x^2 + 12x + 36$

2. $x^2 + 144 - 24x$

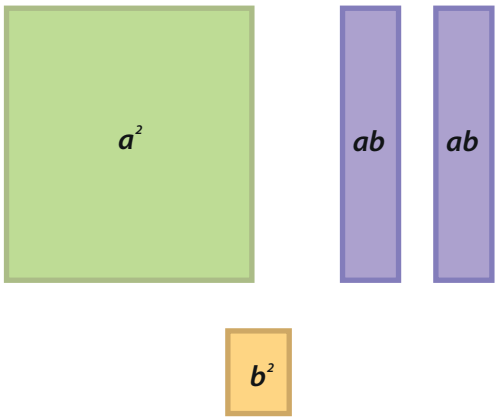
3. $1 - 8y + 16y^2$

4. $-40xy^2 + 16x^2 + 25y^4$

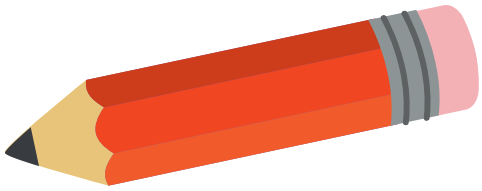
5. $40x^5z^4 + 1 + 400x^{10}z^8$

Actividad 38

Organice los rectángulos y los cuadrados dados en la imagen de forma que quede demostrado que $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$.



Clase 9



Actividad 39

Escriba cada trinomio cuadrado perfecto como dos factores.

1. $x^4 + 6x^2 + 9$

2. $x^6 - 4x^3 + 4$

3. $y^8 - 2y^4z^3 + z^6$

4. $a^{10} + 8a^5 + 16$

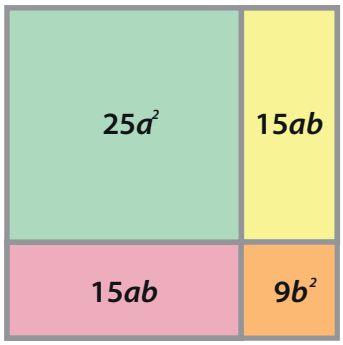
5. $9a^2 - 12ab + 4b^2$

6. $16x^2 + 40xy^2 + 25y^4$

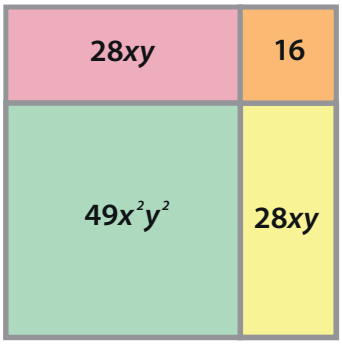
Actividad 40

Escriba el polinomio que representa el área de cada figura. Luego, factorice el trinomio cuadrado perfecto resultante.

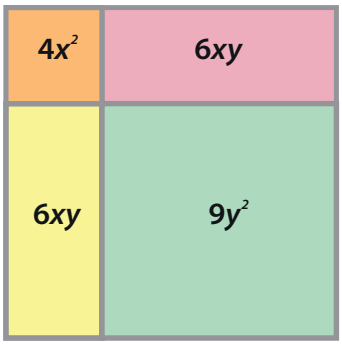
1.



2

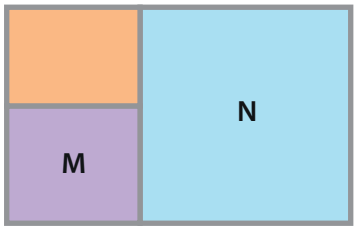


3



Actividad 41

Encuentre el área del rectángulo naranja teniendo en cuenta la información dada.



Actividad 42

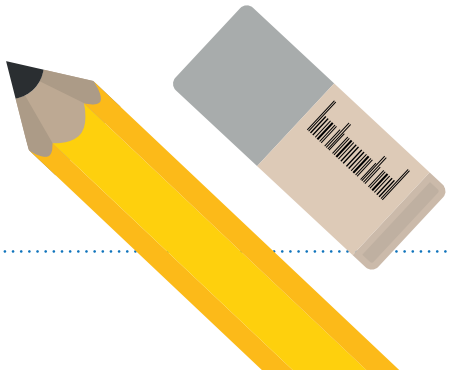
Una con líneas los términos que forman los tres trinomios cuadrados perfectos. Luego, escríbalos en forma factorizada.

$16n^2$	n^6	m^8
$-2n^3m^2$	$-72n$	$+m^4$
$+18m^4n^2$	$+81n^4$	$+81$

Primer trinomio

Segundo trinomio

Tercer trinomio



Clase 10 Esta clase tiene video

Tema: Factorización de un trinomios de la forma $x^2 + bx + c$

Actividad 43

Encuentre dos números que cumplan las condiciones dadas.

1. **Sumados den 7**
   Multiplicados den 10
2. **Multiplicados den 12**
   Sumados den –7
3. **Sumados den –3**
   Multiplicados den –18

Actividad 44

Escriba en la tabla los números *p* y *q* que cumplan las condiciones.

p	*q*	*p* + *q*	*pq*
		5	6
		3	–40
		–4	–21
		–6	–40
		–5	–24
		18	32

Actividad 45

Utilice líneas para unir cada trinomio con su respectiva factorización:

$x^2 + 2x - 35$	$(x + 7)(x + 6)$
$x^2 + 4x - 5$	$(x + 7)(x - 5)$
$x^2 + 13x + 42$	$(x - 11)(x - 3)$
$x^2 - 14x + 33$	$(x + 5)(x - 1)$

Actividad 46 – Tarea

Factorice cada trinomio.

1. $x^2 - 10x + 9$
2. $x^2 + 7x + 10$
3. $x^2 - x - 12$

Clase 11

Tema: Factorización de un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$

Actividad 47

Escriba los términos que faltan en cada trinomio para que la igualdad se verifique.

1. $x^2 +$ _____ $x -$ _____ $= (x + 6)(x - 3)$

2. $y^2 -$ _____ $y -$ _____ $= (y - 24)(y + 3)$

3. $m^2 -$ _____ $m -$ _____ $= (m - 7)(m + 4)$

Actividad 48

Factorice los siguientes trinomios.

Recuerde que sí es posible factorizar trinomios en los cuales los exponentes de x sean, respectivamente, 4 y 2, 6 y 3, 8 y 4 etc.

1. $x^6 - 6x^3 - 7$

2. $x^4 - 37x^2 - 210$

3. $x^8 - 27x^4 + 50$

Actividad 49

Factorice los siguientes trinomios.

Recuerde que es posible usar la descomposición en factores primos para encontrar los números que verifican las condiciones del trinomio.

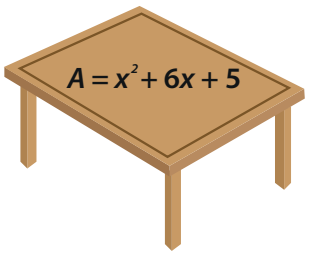
1. $a^2 + 26 + 144$

2. $m^2 + 7m - 450$

3. $x^2 - 32x - 1.680$

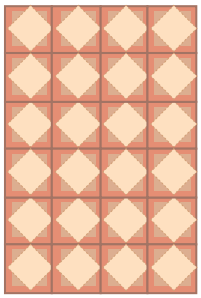
Actividad 50

1. El área de la superficie plana de la mesa está dada por la expresión mostrada. ¿Cuáles pueden ser las dimensiones de esta superficie?



2. La figura muestra una habitación recubierta con un piso de madera. ¿Qué expresiones representan las dimensiones de la habitación?

$A = x^2 + 12x + 27$



Resumen

Trinomio cuadrado perfecto

Para **factorizar un trinomio cuadrado perfecto** se debe:

1. Ordenar el trinomio.
2. Se extraen las raíces (exactas) del primero y tercer término y se verifica que el segundo término sea el doble producto de la primera raíz por la segunda.
3. Si el segundo término es **positivo**, se eleva al cuadrado la suma de las raíces cuadradas del primer y tercer término.
4. Si el segundo término es **negativo**, se eleva al cuadrado la diferencia de las raíces cuadradas del primer y tercer término.

La **factorización** de un **trinomio cuadrado perfecto** es:

$$x^2 + 2xy + y^2 = \underbrace{(x + y)^2}_{\text{Expresión factorizada}}, \text{ o, } x^2 - 2xy + y^2 = \underbrace{(x - y)^2}_{\text{Expresión factorizada}}$$

Trinomio de la forma $x^{2n} + bx^n + c$

En este trinomio el primer término tiene coeficiente 1 y el tercer termino es un número.

El segundo término contiene la misma variable que el primer término, elevada a un exponente que es la mitad del exponente del primer término.

La factorización de este trinomio se hace de la siguiente manera:

1. Se halla la raíz cuadrada del primer término y se escribe entre paréntesis.
2. Se buscan los números "r" y "s" tales que su producto sea el término constante "c" y su suma el coeficiente "b" del segundo término.

   Se expresa el producto de dos factores de tal manera que en cada uno se escriba la suma de la raíz cuadrada del primer término con los números "r" y "s" de tal manera que:

$$x^{2n} + bx^n + c = (x^n + r)\,(x^n + s) \text{ teniendo en cuenta que}$$

$$r + s = b, \text{ además } rs = c$$

Clase 12 Esta clase tiene video

Actividad 51

Halle los números *m* y *n* que cumplan las siguientes condiciones:

Primera condición: $b = m + n$

Segunda condición: $mn = ac$

Observe el ejemplo resuelto en la primera fila de la tabla.

$ax^2 + bx + c$	m	n	$b = m + n$	$mn = ac$
$6x^2 + 7x - 5$	10	–3	$7 = 10 + (-3)$	$10(-3) = 6(-5)$
$6x^2 - 23x + 15$				
$3x^2 - 4x - 4$				
$5x^2 - 2x + 2$				
$5x^2 - 10x - 40$				
$4n^2 + n - 33$				

Actividad 52

1. **Lea la siguiente información.**

Para factorizar un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$, se puede proceder de la siguiente manera:

Primero: Se buscan dos números, n y m, que verifiquen simultáneamente que:

$m + n = b$ y $mn = ac$.

Segundo: A los dos números se les escribe la variable que se está usando en el polinomio, elevada a la uno. La expresión algebraica ahora tiene cuatro (4) términos.

Tercero: Se agrupan los dos (2) primeros términos y los dos (2) últimos términos y se saca el factor común en cada uno.

Cuarto: Se saca el factor común entre los binomios dados.

2 **Teniendo en cuenta la información anterior, escriba las expresiones que faltan en cada factorización.**

a) $8m^2 - 2m - 3 = 8m^2 - 6m + 4m - 3$

$= (8m^2 - _____) + (4m - 3)$

$= 2m\,(_____) + (4m - 3)$

$= (4m - 3)(_____)$

b) $3x^2 - 5x - 12 = 3x^2 - 9x + 4x - 12$

$= (3x^2 - _____) + (4x - 12)$

$= 3x(_____) + 4\,(_____)$

$= (x - 3)(_____)$

Tenga en cuenta que los números *a*, *b* y *c* están dados en el trinomio $ax^2 + bx + c$ y los números *m* y *n* se deben buscar.

Actividad 53

Analice y factorice los trinomios dados.

1 $12x^2 - 19x - 18$

2 $4x^2 - 19x + 1$

3 $10y^2 + 9y - 7$

4 $3x^2 - x - 2$

Actividad 54

Escriba en el diagrama los factores de los trinomios indicados.

$3y^2 + 5y - 2$

$6y^2 + y - 1$

$6y^2 - 5y - 4$

$15y^2 - 29y + 12$

$10y^2 + 9y - 9$

Clase 13

Actividad 55

1. Lea el ejemplo que muestra cómo factorizar el trinomio $6x^2 + x - 2$.

$6x^2 + x - 2 = \dfrac{6(6x^2 + x - 2)}{6}$	Se multiplica y de divide entre 6.
$= \dfrac{(6x^2) + (6x) - 12}{6}$	Se escribe el trinomio de la forma $x^2 + bx + c$
$= \dfrac{(6x + 4)(6x - 3)}{6}$	Se factoriza el trinomio $x^2 + bx + c$
$= \dfrac{2(3x + 2)\ 3(2x - 1)}{6}$	Se busca factor común en los binomios.
$= (3x + 2)\ (2x - 1)$	Se simplifica.

En este nuevo método, se convierte el trinomio $ax^2 + bx + c$ en un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$

Tenga en cuenta que puede usar cualquiera de los métodos vistos para factorizar el trinomio.

2 **Factorice los siguientes trinomios**

a) $2a^2 + 5a - 12$

b) $16m^2 + 4m - 2$

c) $2x^2 + 5x + 2$

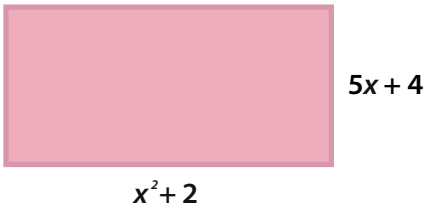
d) $9x^2 - 36x - 45$

Clase 14

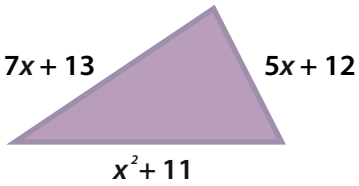
Actividad 56

1 **Determine una expresión, en forma factorizada, para calcular el perímetro de cada figura:**

a)

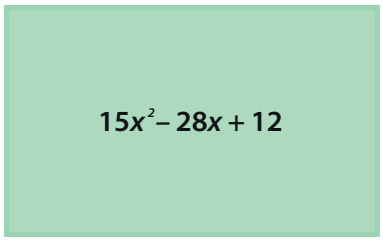


b)

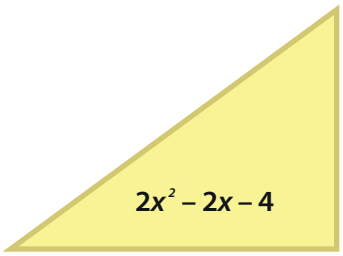


2 **Halle las dimensiones de cada figura. Tenga en cuenta que el polinomio dado representa su área**

a)



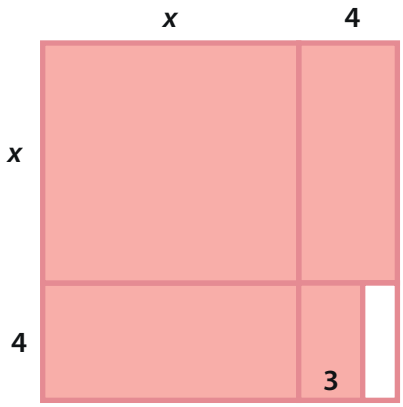
b)



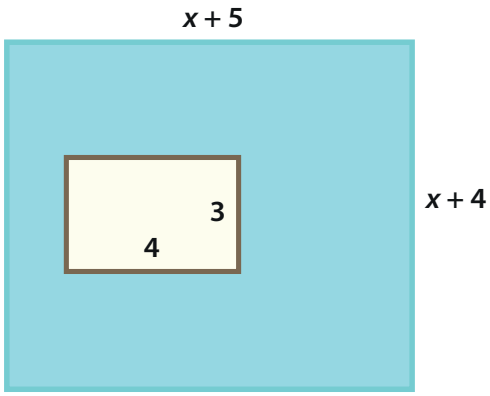
Actividad 57

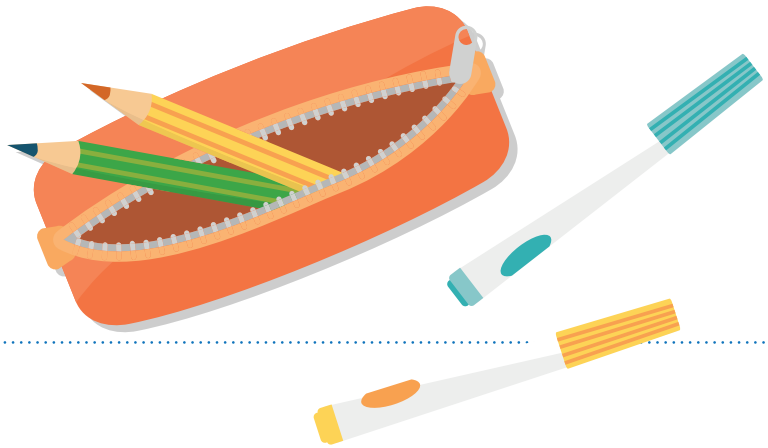
Determine una expresión, en forma factorizada, para calcular el área de la región sombreada de cada figura.

1



2

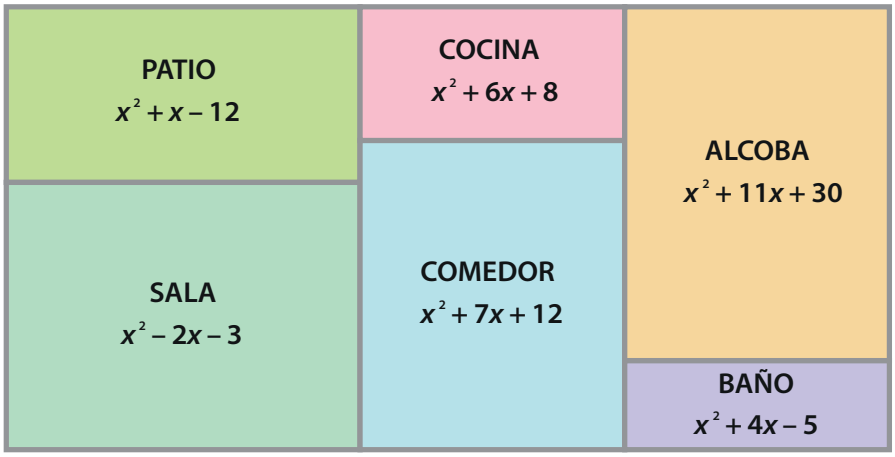


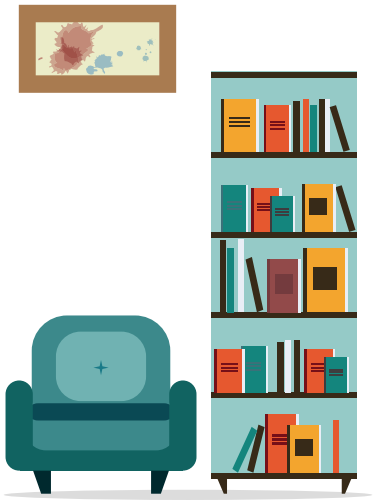


Clase 15

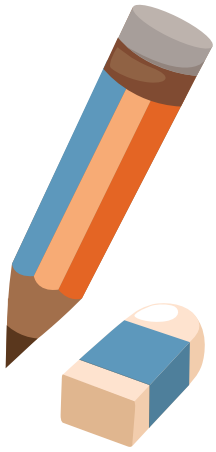
Actividad 58

1. El siguiente plano muestra las expresiones para las áreas de un apartamento. Determine las expresiones para las dimensiones de cada espacio.

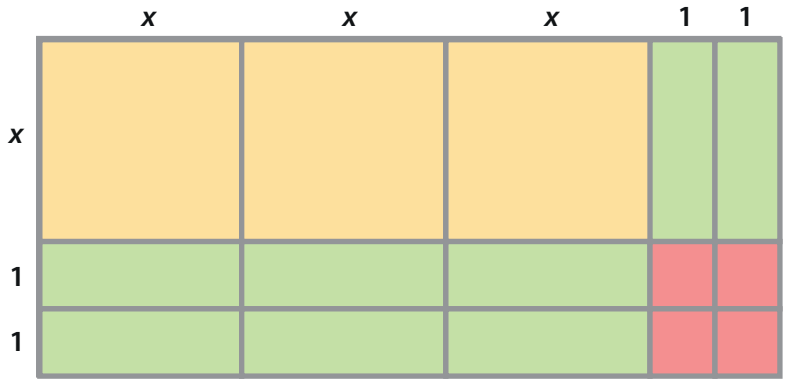




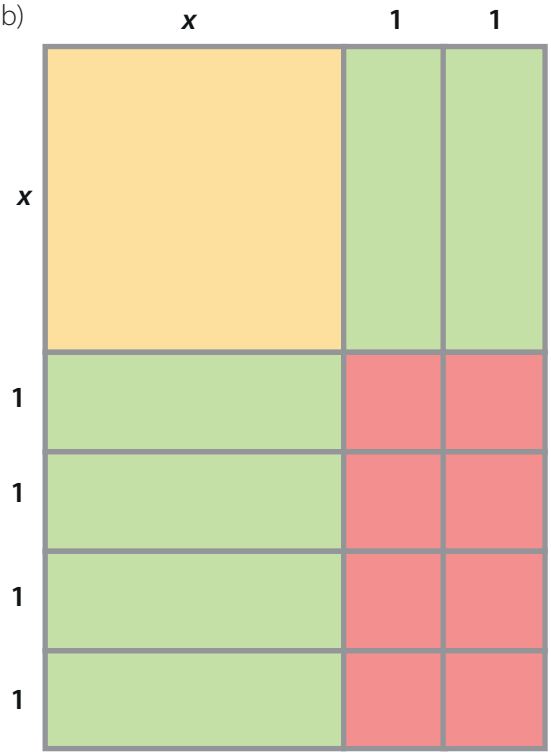
2 **Para cada diagrama, escriba el polinomio que representa y su factorización.**



a)



b)



Resumen

Factorización de trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$.

Método 1

Para factorizar trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ se puede proceder de la siguiente manera:

Primero. Se buscan dos (2) números, n y m que verifiquen simultáneamente que:

$$m + n = b \quad \text{y} \quad mn = ac$$

Segundo. A los dos números se les escribe la variable que se está usando en el polinomio, elevado a la uno. La expresión algebraica ahora tiene 4 términos.

Tercero. Se agrupan los dos primeros términos y los dos últimos términos y se saca el factor común en cada uno.

Cuarto. Se saca el factor común entre los binomios dados.

Método 2

En este segundo método se convierte el trinomio $ax^2 + bx + c$ en un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$. Los pasos son los siguientes:

Primero. Se multiplica y se divide el trinomio $ax^2 + bx + c$ entre a

$$\frac{a(ax^2 + bx + c)}{a}$$

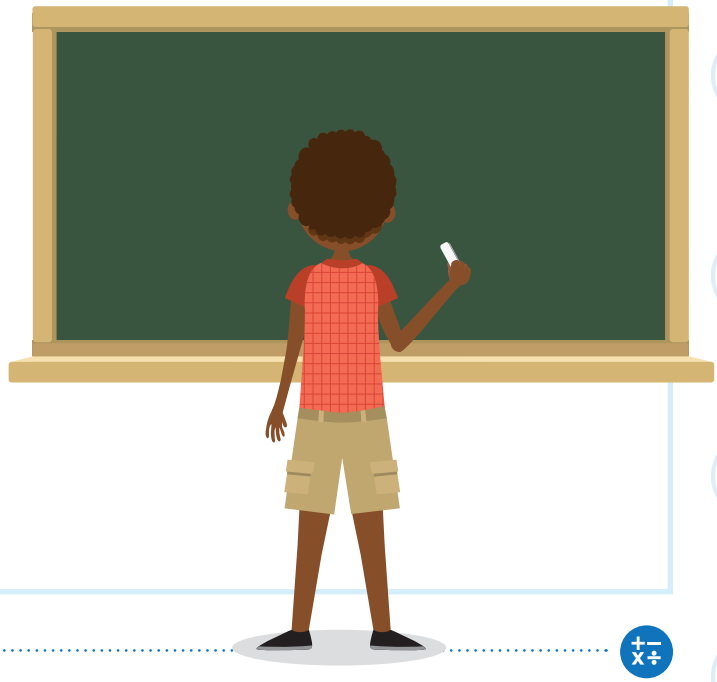
Segundo. Se elimina el paréntesis del numerador dejando indicado el resultado tal como sigue:

$$\frac{(ax)^2 + b(ax) + ac}{a}$$

Tercero. Se factoriza el trinomio del numerador así:

$$\frac{(ax + m)(ax + n)}{a} \quad \text{en donde: } m + n = b \text{ y } mn = ac$$

Cuarto. Se factorizan los binomios obtenidos en el numerador hasta donde sea posible y finalmente, se simplifica la última expresión obtenida.



Clase 16 Esta clase tiene video

Tema: Factorización completa

Actividad 59

1 Complete cada expresión para que sea trinomio cuadrado perfecto.

a) $x^2 + \square x + 49 = (x + 7)(x + 7)$

b) $a^4 - \square a^2 + 25 = (a^2 - \square)(a^2 - \square)$

c) $25x^2 + \square x + 16 = (5x + \square)(5x + \square)$

d) $\square x^2 + \square x + 25 = (3x + \square)(3x + \square)$

e) $\square y^2 - \square y + 81 = (7y - \square)(7y - \square)$

2 Observe las gráficas que permiten ver cómo se completa un trinomio cuadrado perfecto.

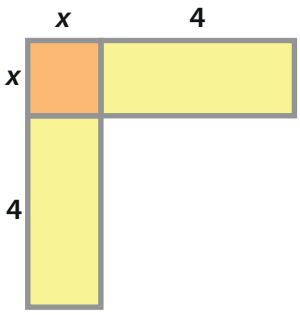


Figura 1

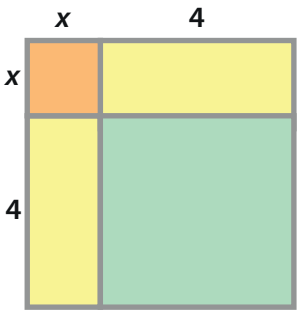


Figura 2

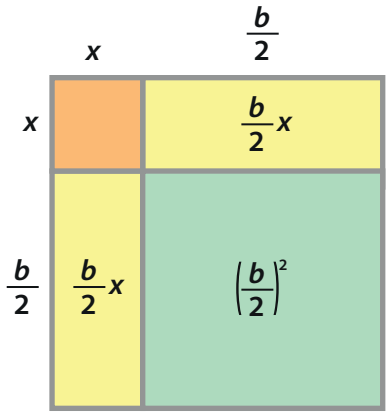
a) Escriba la expresión algebraica que representa el área de las tres partes de la Figura 1.

b) Determine la suma de las áreas de las 4 partes de la Figura 2.

c) Este procedimiento ha dado como resultado en la parte b) un trinomio cuadrado perfecto. Escriba el trinomio cuadrado perfecto como el cuadrado de un binomio.

3 **Lea la siguiente información.**

De manera más general, la siguiente imagen muestra cómo completar el trinomio cuadrado perfecto partiendo de la expresión $x^2 + bx$.



$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 =$$

$$x^2 + 2\left(\frac{b}{2}\right)x + \left(\frac{b}{2}\right)^2 =$$

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2$$

Ahora, complete los trinomios cuadrados perfectos en cada caso:

a) $x^2 + 10x$

b) $x^2 + 4x$

c) $x^2 - 14x$

d) $y^2 - 8y$

e) $z^2 - 3z$

f) $x^2 + 7x$

Actividad 60

Siga las indicaciones dadas para factorizar cada polinomio:

1

Polinomio dado	$18a^3 - 50a$
Factor común	
Diferencia de cuadrados	

2

Polinomio dado	$ax + ay - 4bx - 4by$
Asociar por parejas	
Factor común en ambas parejas	
Factor común polinomio	

3

Polinomio dado	$4 - a^2 + 4ab - b^2$
Asociar un trinomio	
Factorizar el trinomio cuadrado perfecto	
Factorizar la diferencia de cuadrados	

4

Polinomio dado	$x^2 + 2xy + y^2 - 1$
Asociar un trinomio	
Factorizar el trinomio cuadrado perfecto	
Factorizar la diferencia de cuadrados	

5

Polinomio dado	$25x^5 - 200x^2$
Factor común	
Diferencia de cubos	

Clase 17

Actividad 61

Explique, en cada casilla, los pasos empleados para factorizar los polinomios dados.

1.

$x^4 - 16$	Polinomio dado
$(x^2 - 4)(x^2 + 4)$	
$(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$	

2.

$(k - 1)^4 - (k - 1)^2$	Polinomio dado
$((k - 1)^2 + (k - 1))((k - 1)^2 - (k - 1))$	
$(k^2 - 2k + 1 + k - 1)(k^2 - 2k + 1 - k + 1)$	
$(k^2 - k)(k^2 - 3k + 2)$	
$k(k - 1)(k - 1)(k - 2)$	
$k(k - 1)^2 (k - 2)$	

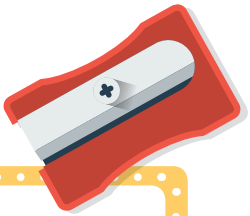
3.

$a(b^3 + 1) + 3ab(b + 1)$	Polinomio dado
$a(b + 1)(b^2 - b + 1) + 3ab(b + 1)$	
$a(b + 1)(b^2 - b + 1 + 3b)$	
$a(b + 1)(b^2 + 2b + 1)$	
$a(b + 1)(b + 1)^2$	
$a(b + 1)^3$	

4.

$108x^3 + 4y^3$	Polinomio dado
$4(27x^3 - y^3)$	
$4(3x - y)(9x^2 + 3xy + y^2)$	

Actividad 62



1 **Analice cómo se factorizó completamente la expresión $3x^3y^2 - 3x^2y^2 - 18xy^2$.**

$3x^3y^2 - 3x^2y^2 - 18xy^2 = 3xy^2(x^2 - 3x - 6)$ Sacando el factor común $3xy^2$

$= 3xy^2(x + 2)(x - 3)$ Factorizando el trinomio $x^2 - 3x - 6$

2 **Ahora factorice completamente los siguientes polinomios. Justifique cada paso.**

Pasos	Justificación
a) $9x^2 - 36xy + 36y^2 =$	
b) $(x - 1)^3 - (1 - x)^3 =$	
c) $x^4 - 81 =$	

Clase 18

Actividad 63

Analice cada paso de la factorización dada y escriba la expresión que corresponde a cada espacio. Para ello, tenga en cuenta la ayuda.

1. $x^3 + 2x^2 + 2xy + 2y^2 - y^3 = (_____) + 2x^2 + 2xy + 2y^2$

$= (_____)(x^2 + xy + y^2) + 2(_____)$

$= (_____)(x - y + 2)$

Ayuda: $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

2. $x^4 - 16y^4 - 4x^3y + 16xy^3 = (x^2 + 4y^2)(_____) - 4xy(_____)$

$= (x^2 - 4y^2)(_____)$

$= (x + 2y)(_____)(x - 2y)^2$

$= (_____)(x - 2y)^3$

Ayuda: $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$
$(x^2 - 2xy + y^2) = (x - y)^2$

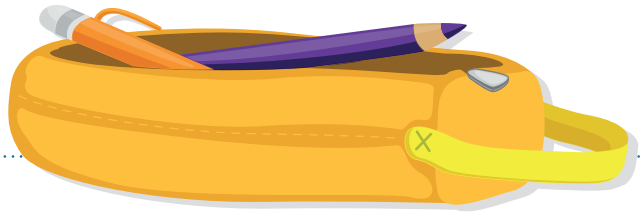
3. $x^2 - 10x + 25 + ax^2 - 25a = (_____)^2 + a(x^2 - 25)$

$= (x - 5)^2 + a(_____)(x - 5)$

$= (_____)[x - 5 + a(x + 5)]$

$= (x - 5)(_____)$

Ayuda: $ax - ay = a(x - y)$



Actividad 64

1 **Si a una lámina cuadrada de lado $b + 3$ se le hacen 4 huecos cuadrados de lado a, (ver figura 1), determine la expresión algebraica que determina el área de la superficie resultante y luego factorícela.**

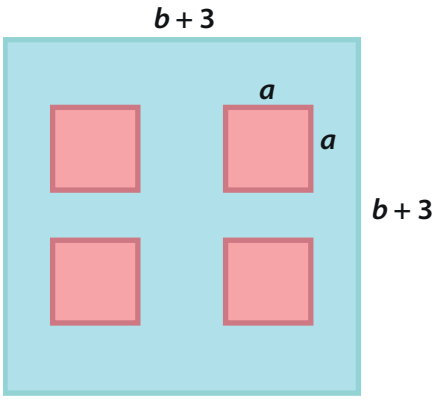


Figura 1

2 **Factorice las siguientes expresiones algebraicas:**

a) $(x + 4)^2 - 49$

b) $x^2 - (y + 2)^2$

c) $(x - 1)^2 - (y - 1)^2$

d) $2y^4 - 50y^2$

Actividad 65

Factorice los polinomios dados teniendo en cuenta la sugerencia dada a la derecha.

1. $5a^2 + a$ — Factor común
2. $a^2 + a - ab - b$ — Factorización por agrupación
3. $9x^2 - 12xy + 4y^2$ — Trinomio cuadrado perfecto

1

2

3

4. $x^2 - 7x + 10$ — Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$
5. $x^2 - 100$ — Diferencia de cuadrados
6. $6y^2 - y - 2$ — Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$

4

5

6

7. $6a^4b - 6a^2b^3 - 9a^3b^2 + 9ab^4$ — Factor común – Factorización por agrupación – Diferencia de cuadrados
8. $ax^6 - 5ax^4 + 4ax^2$ — Factor común – Trinomio de la $x^2 + bx + c$ – Diferencia de cuadrados
9. $\frac{4}{9}y^2 - 16b^6$ — Diferencia de cuadrados

7

8

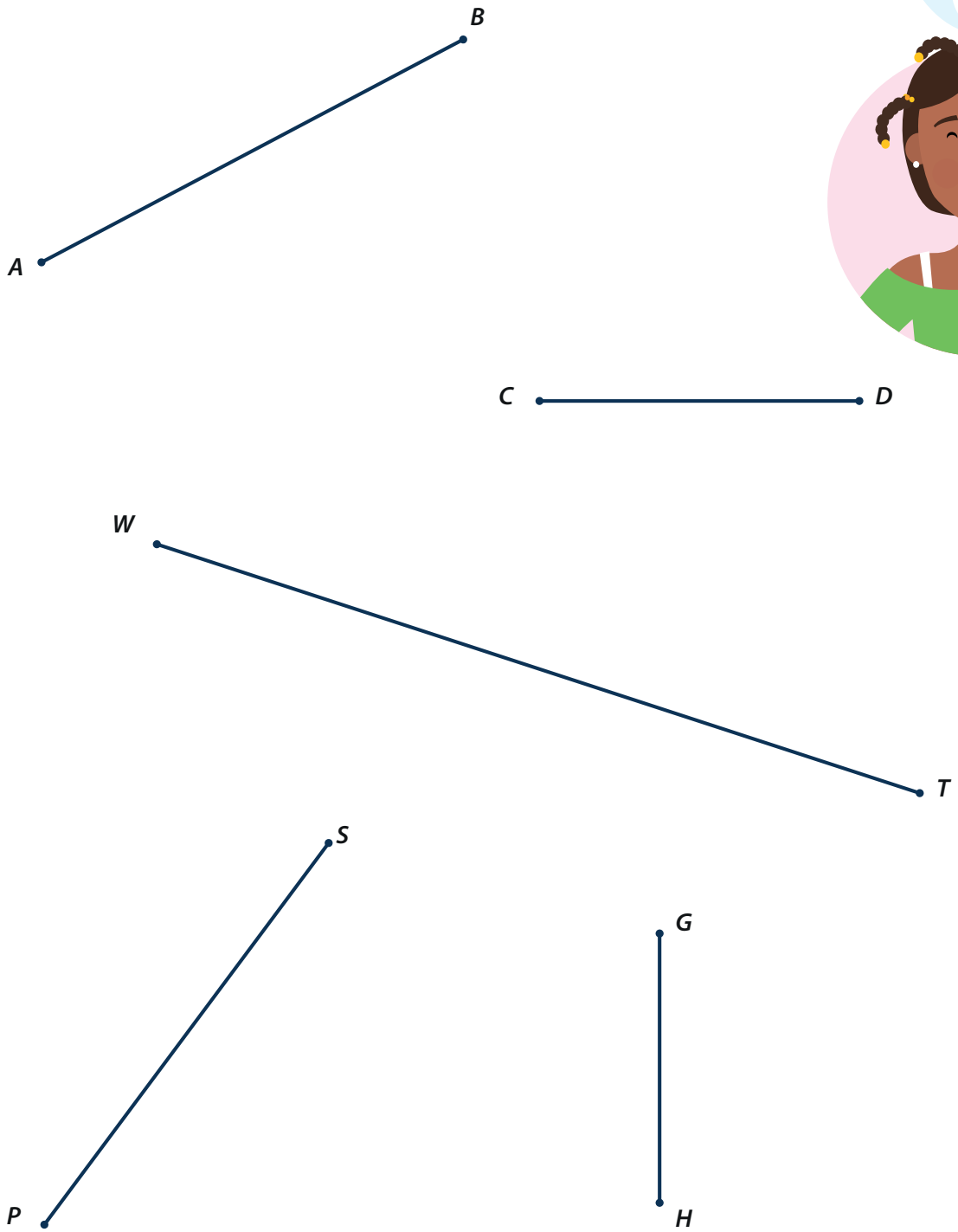
9

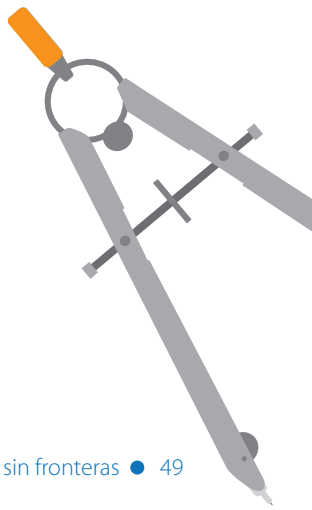
Clase 19 Esta clase tiene video

Tema: Líneas y puntos notable en un triángulo. Mediatrices

Actividad 66

1 **Determine el punto medio de cada uno de los siguientes segmentos.**

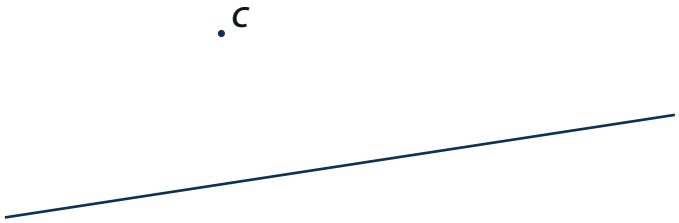




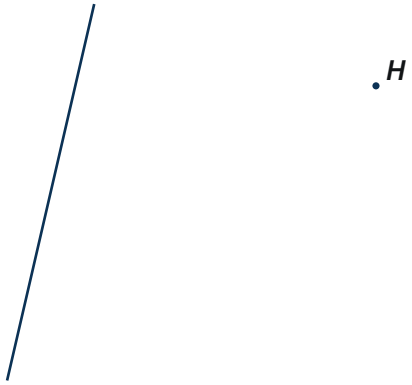
Actividad 67

Trace una recta perpendicular a cada línea recta dada. Utilice el compás para la construcción.

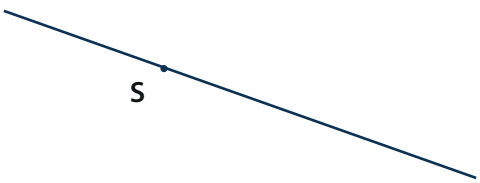
1 **Perpendicular que pase por el punto C.**



2 **Perpendicular que pase por el punto H.**



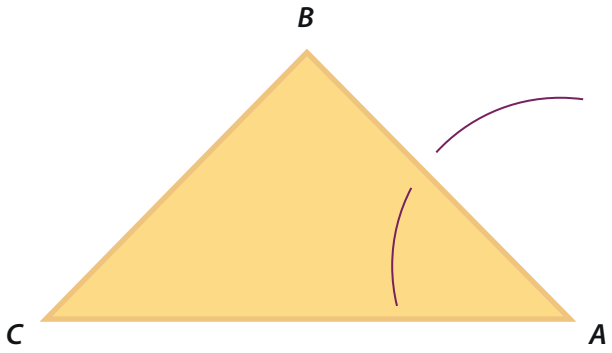
3 **Perpendicular que pase por el punto S.**



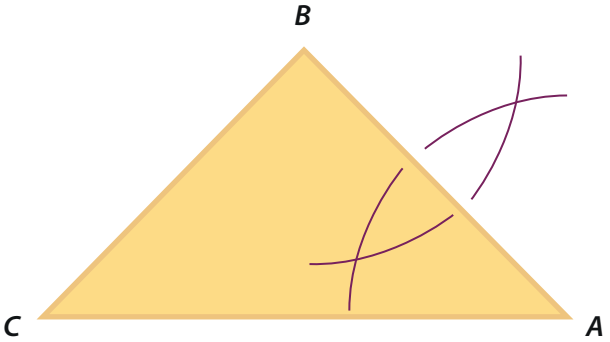
Actividad 68

Observe el proceso para trazar las mediatrices en el triángulo ABC.

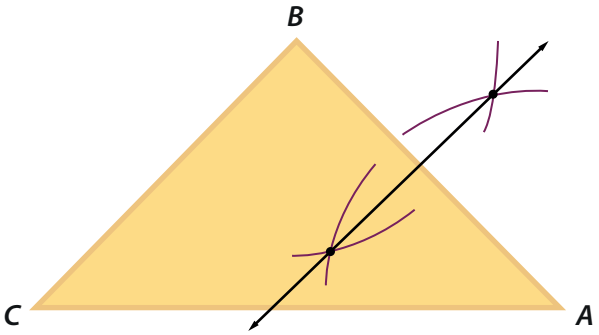
Primero. Con el compás, y haciendo centro en el vértice A, se traza un arco como se muestra en la imagen.



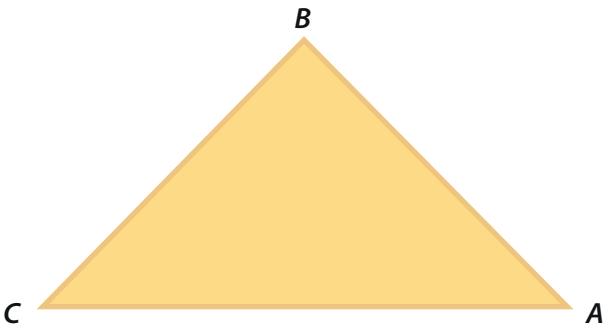
Segundo. Con la misma abertura que se usó en el paso anterior y haciendo centro en el vértice B, se traza un arco que corte al arco anterior. Este arco genera dos puntos.



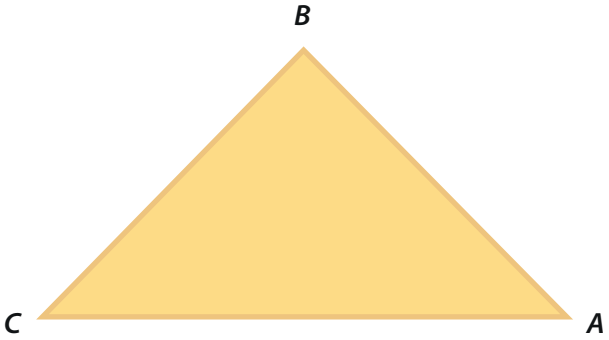
Tercero. Se traza una recta que pase por los dos puntos que se generaron en el paso anterior.



Cuarto. Se hace el procedimiento sobre el segmento BC. Realice esta construcción.



Quinto. Se hace el procedimiento sobre el segmento CA. Realice esta construcción.



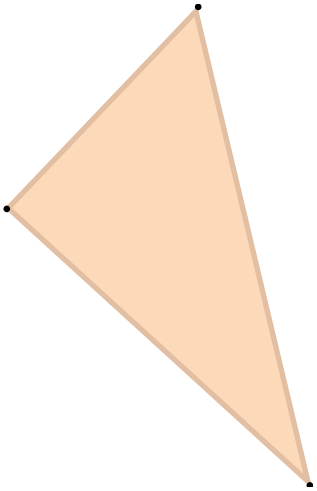
Clase 20

Actividad 69

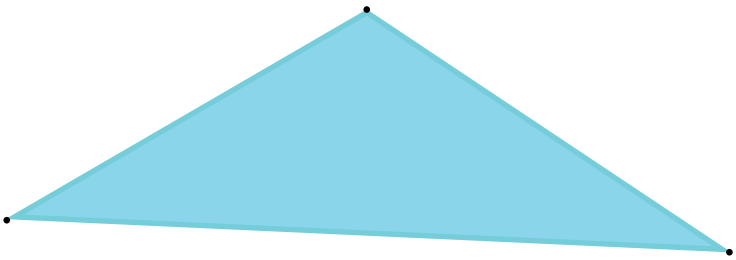
Trace las tres mediatrices en cada uno de los siguientes triángulos.

Escriba la **clasificación** según la medida de los ángulos y las medida de los lados en cada triángulo.

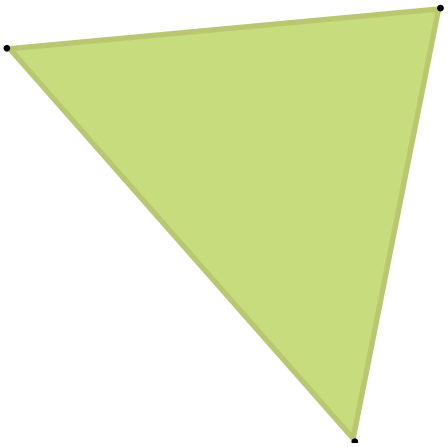
1



2

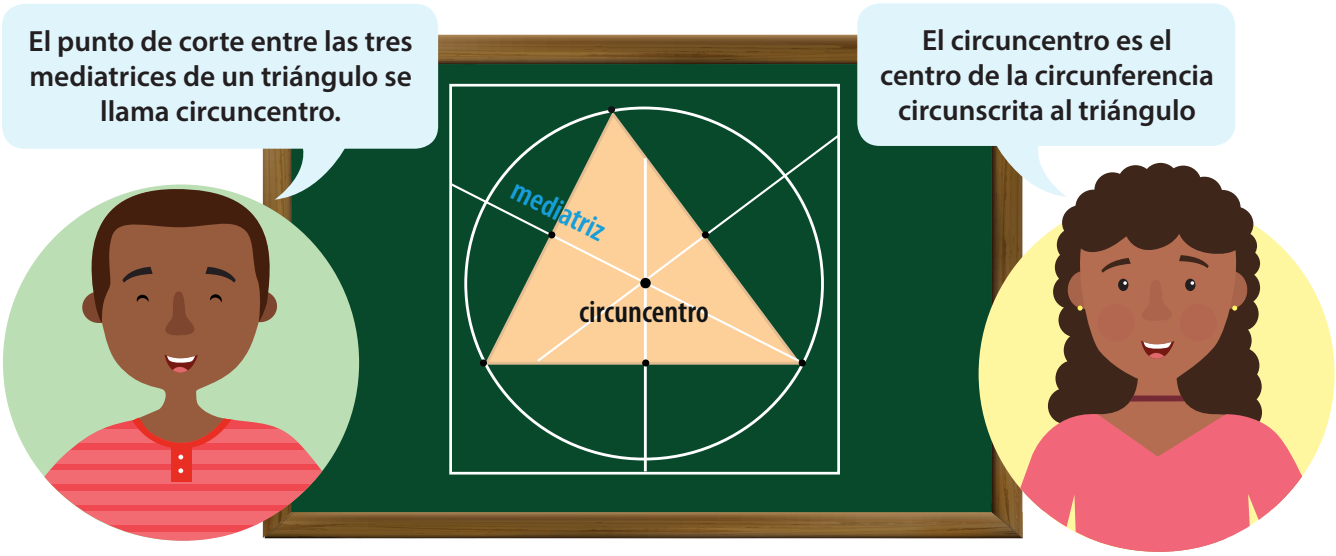


3

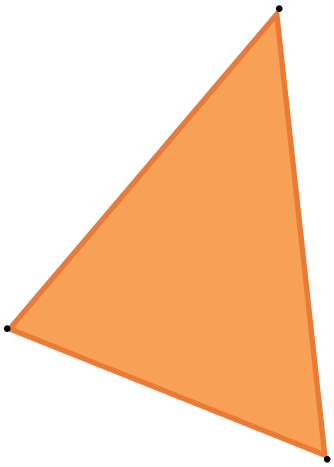


Actividad 70

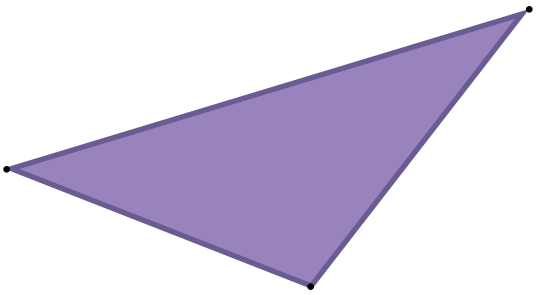
Encuentre el circuncentro en cada uno de los siguientes triángulos y trace la circunferencia circunscrita.



1



2



3 **Responda las siguiente preguntas:**

a) ¿Qué diferencia hay entre el circuncentro de un triángulo acutángulo y el circuncentro de un triángulo obtusángulo?

_____

b) ¿Qué diferencia hay entre el circuncentro de un triángulo acutángulo y el circuncentro de un triángulo rectángulo?

_____

c) ¿Qué diferencia hay entre el circuncentro de un triángulo rectángulo y el circuncentro de un triángulo obtusángulo?

_____

Clase 21 Esta clase tiene video

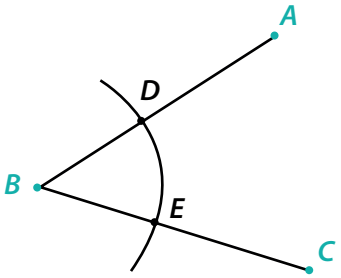
Tema: Líneas y puntos notable en un triángulo. Bisectrices

Actividad 71

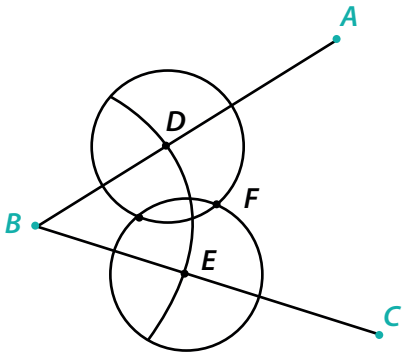
1 **Observe la manera en la que se traza la bisectriz de un ángulo.**

Primero. Se dibuja el ángulo.

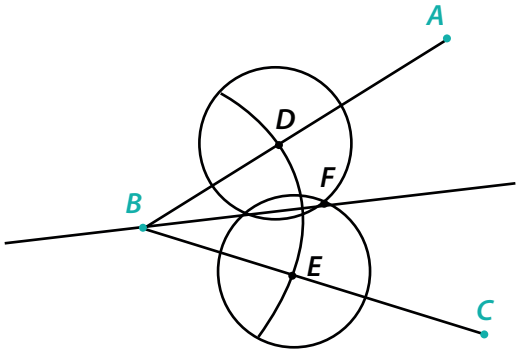
Segundo. Con el compás, y usando cualquier abertura, se traza un arco que corte los dos lados del ángulo. Se marcan los puntos de corte, en este caso con las letras D y E.



Tercero. Haciendo centro en D, se traza una circunferencia y haciendo centro en E, se traza otra circunferencia, congruente, que corte a la circunferencia anterior. Se marca el punto F.



Cuarto. Se traza la recta que pasa por el vértice del triángulo y por el punto F.



2 **Lea la siguiente definición y luego, responda las preguntas que siguen.**

La **bisectriz** de un ángulo es una semirrecta que lo divide en dos ángulos congruentes.

a) Si un ángulo mide 90º, ¿de qué medida es cada uno de los ángulos que genera su bisectriz?

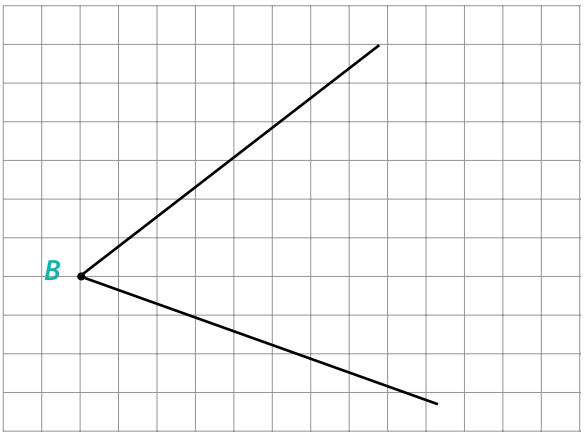
b) La bisectriz de un ángulo generó dos ángulos de 110º cada uno. ¿De qué medida era ese ángulo?

c) ¿La bisectriz puede dividir un ángulo en dos ángulos de medidas 45º y 90º? Explique su respuesta.

Actividad 72

Trace la bisectriz en cada uno de los siguientes ángulos.

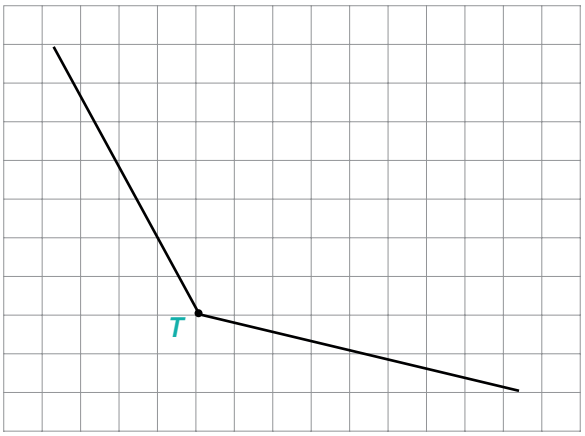
1



a) Estime la medida del ángulo B y escriba su valor.

b) Con esta estimación, ¿cuál es la medida de cada uno de los ángulos que genera la bisectriz?

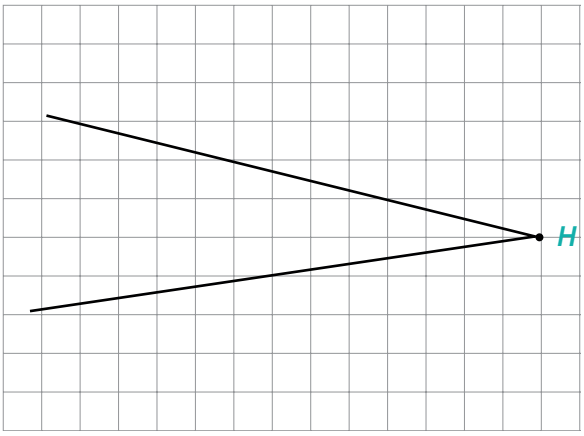
2



a) Estime la medida del ángulo T y escriba su valor.

b) Con esta estimación, ¿cuál es la medida de cada uno de los ángulos que genera la bisectriz?

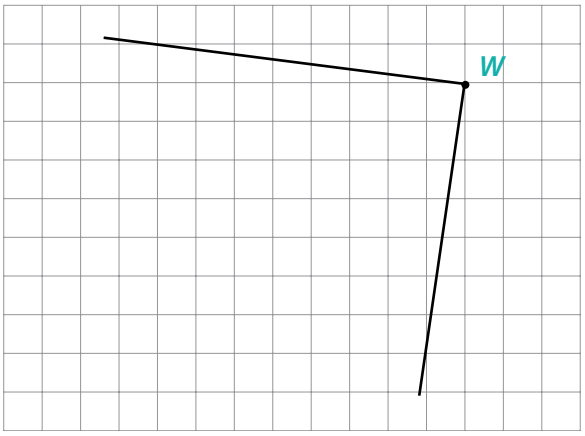
3



a) Estime la medida del ángulo H y escriba su valor.

b) Con esta estimación, ¿cuál es la medida de cada uno de los ángulos que genera la bisectriz?

4



a) Estime la medida del ángulo W y escriba su valor.

b) Con esta estimación, ¿cuál es la medida de cada uno de los ángulos que genera la bisectriz?

Actividad 73

Construya el triángulo indicado. Luego, trace las bisectrices.

Intercambie su guía con otro compañero y pídale que revise su construcción.

1 Triángulo **equilátero** de 5 cm de lado.

2 Triángulo **obtusángulo** isósceles.

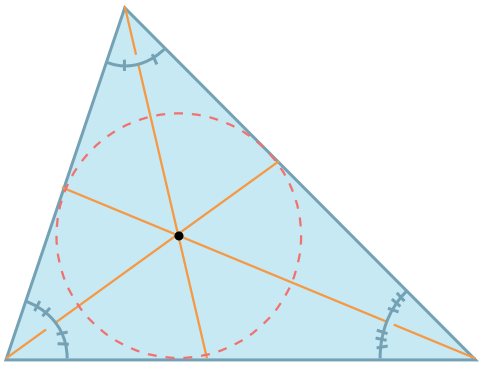
3 Triángulo **rectángulo** escaleno.

Clase 22

Actividad 74

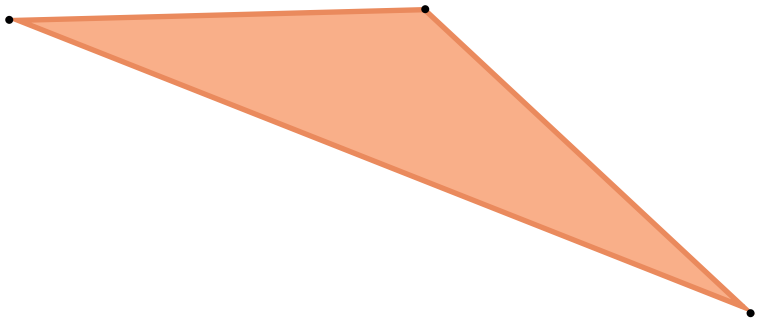
1 Lea la siguiente información.

La tres bisectrices de un triángulo se cortan en un punto llamado **incentro**. El Incentro es el centro de una circunferencia inscrita en el respectivo triángulo.

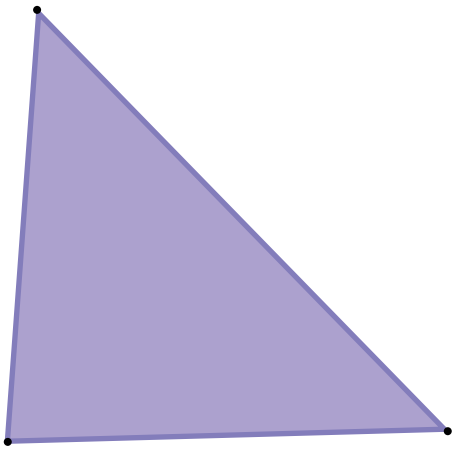


2 Trace las bisectrices en cada triángulo, encuentre el Incentro y trace la correspondiente circunferencia inscrita.

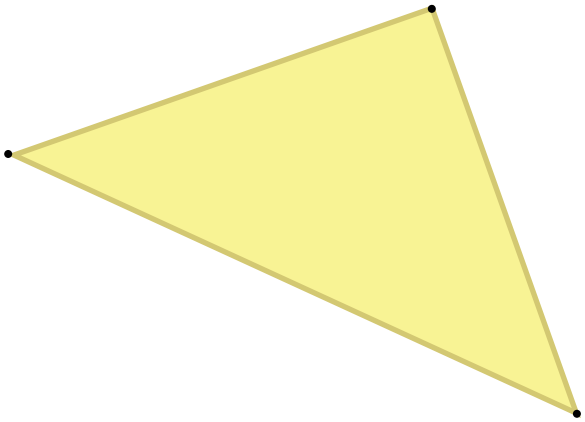
a)



b)



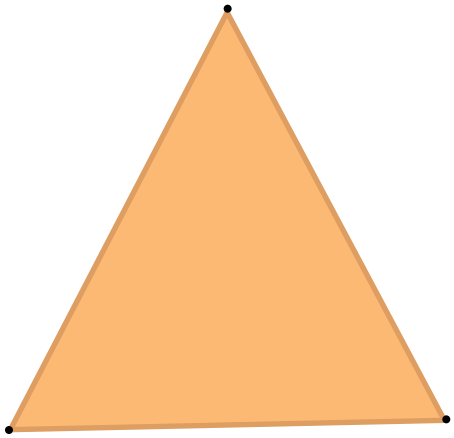
c)



Actividad 75

En cada triángulo, trace con color rojo las mediatrices y con color verde las bisectrices. Luego, responda las preguntas.

1

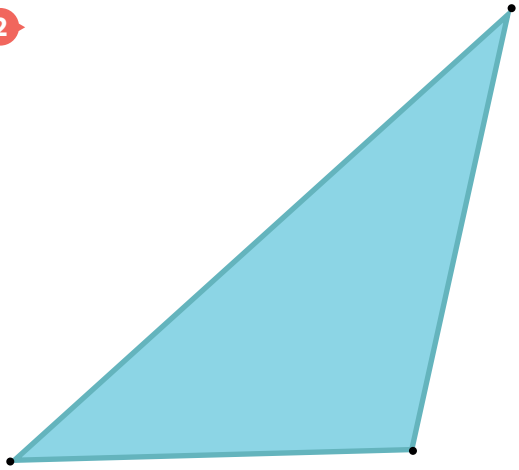


a) ¿Qué tipo de triángulo es?

b) ¿Qué particularidad observa en las líneas trazadas?

c) ¿En qué lugar están ubicados el circuncentro y el incentro?

2

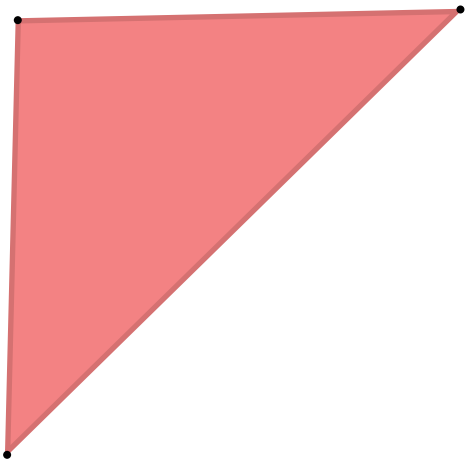


a) ¿Qué tipo de triángulo es?

b) ¿Qué particularidad observa en las líneas trazadas?

c) ¿En qué lugar están ubicados el circuncentro y el incentro?

3



a) ¿Qué tipo de triángulo es?

b) ¿Qué particularidad observa en las líneas trazadas?

c) ¿En qué lugar están ubicados el circuncentro y el incentro?

Clase 23 Esta clase tiene video

Tema: Líneas y puntos notable en un triángulo. Medianas

Actividad 76

Dibuje los segmentos teniendo la longitud dada. Luego, ubique su respectivo punto medio.

1. **Segmento de 3 cm**

2. **Segmento de 9,4 cm**

3. **Segmento de 10,5cm**

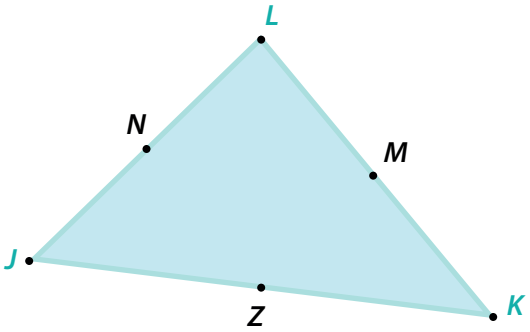
Actividad 77

1. **Lea la siguiente información:**

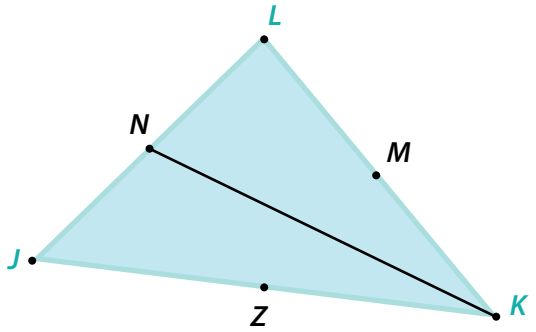
La **mediana** en un triángulo es el segmento que une un vértice con el punto medio de lado opuesto. **En un triángulo se pueden trazar tres medianas**. A continuación se muestra el proceso para trazar las medianas al triángulo *LJK*.

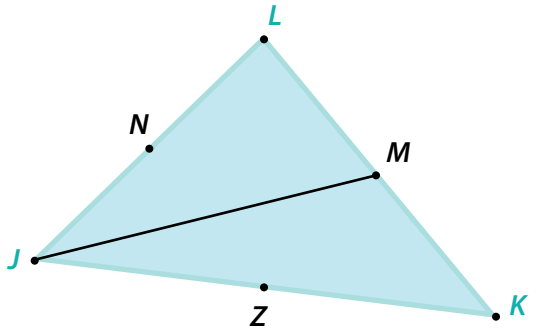
Primero. Se ubica el punto medio de cada uno de los segmentos que forman el triángulo.

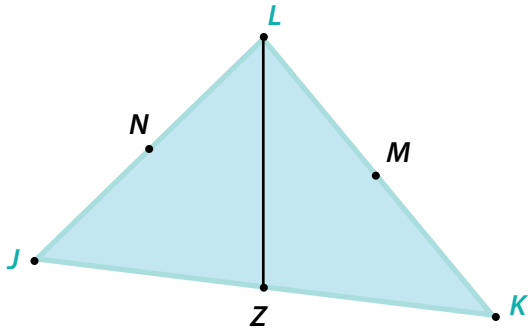
- N es el punto medio del segmento JL.
- M es el punto medio del segmento LK.
- Z es el punto medio del segmento KJ.

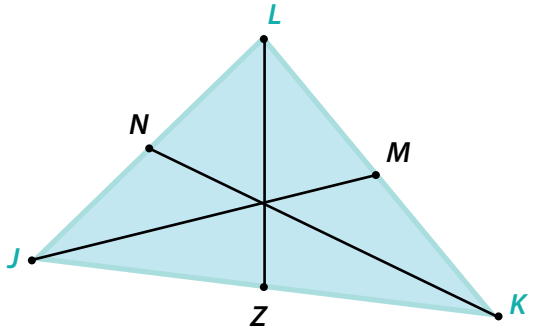


Segundo. Se trazan los segmentos que unen el punto medio de cada lado con su respectivo vértice opuesto.







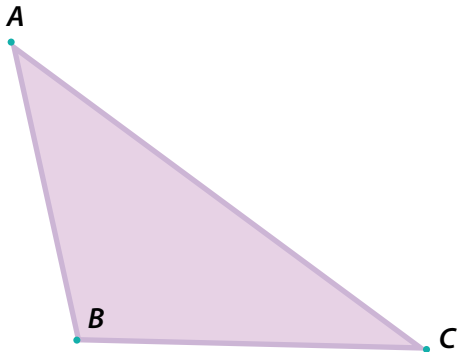


Finalmente las tres medianas.

Actividad 78

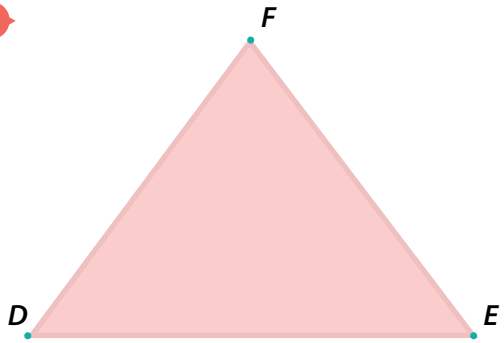
Determine las medianas de los siguientes triángulos.

1



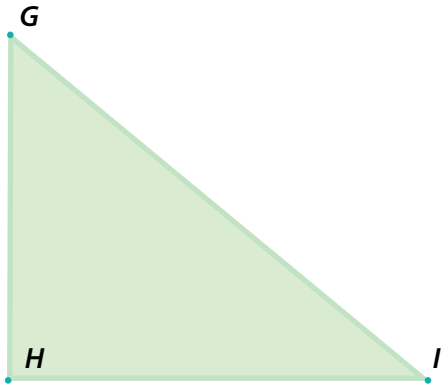
Triángulo **obtusángulo**

2



Triángulo **acutángulo**

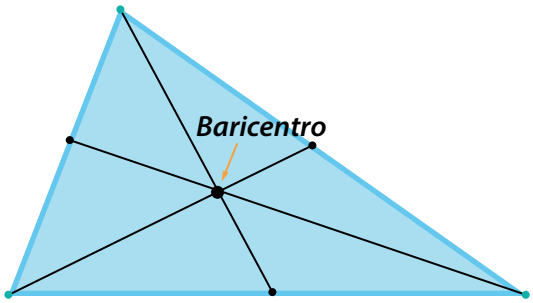
3



Triángulo **rectángulo**.

Actividad 79

Lea la siguiente información:



Actividad 80

1. Use la regla y el compás para construir un triángulo **equilátero** de 6 cm de lado. Luego, trace las medianas y encuentre el **baricentro**.

2. Use la regla y el compás para construir un triángulo **isósceles**. Luego, trace las medianas y encuentre el **baricentro**.

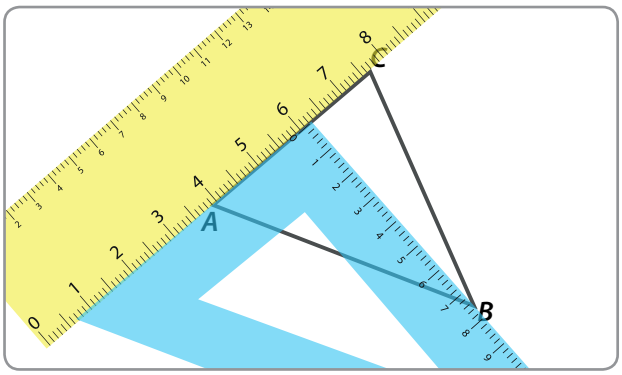
Clase 24 Esta clase tiene video

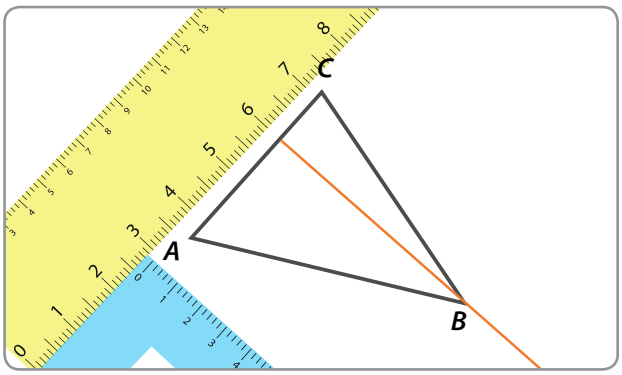
Tema: Líneas y puntos notables del triángulo. Alturas

Actividad 81

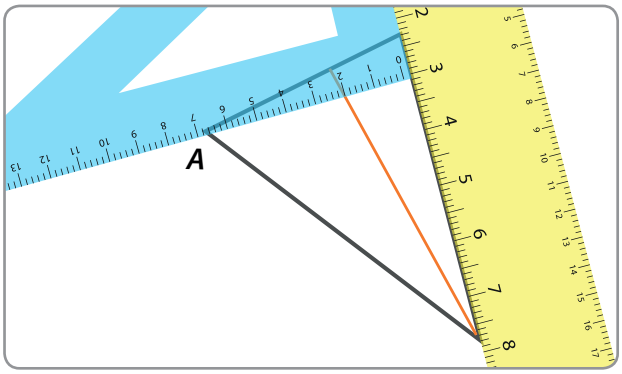
A continuación se muestra el proceso para trazar las alturas de un triángulo acutángulo usando una escuadra y una regla.

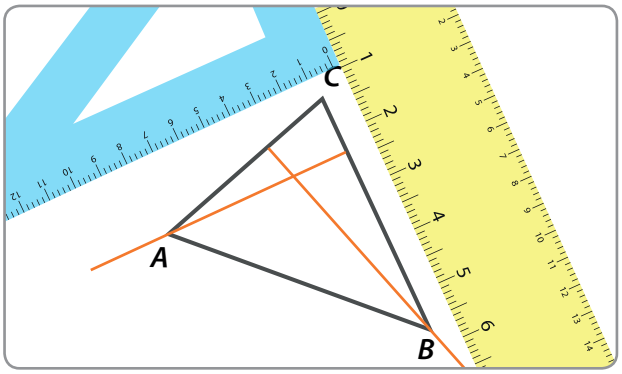
- Primero, se traza una recta perpendicular al lado AC del triángulo y que pase por el vértice B.



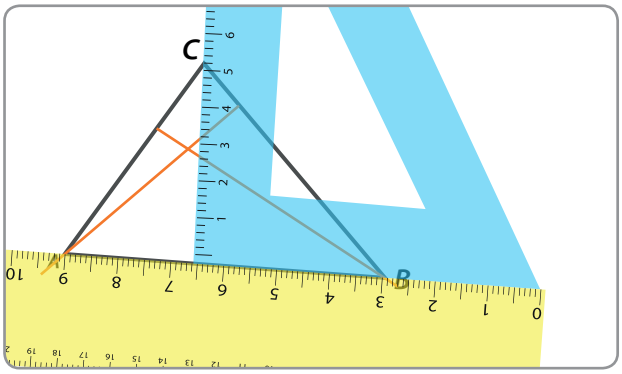


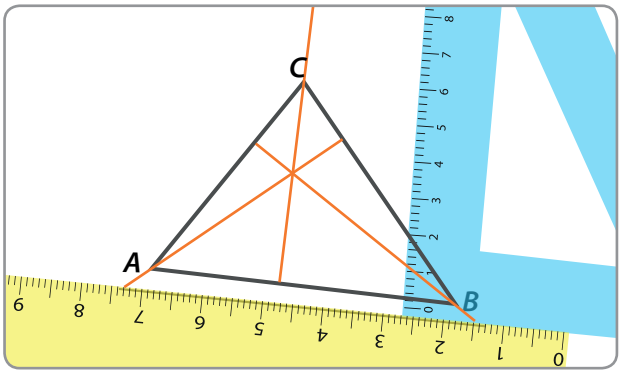
- Este mismo proceso se hace sobre el lado BC.





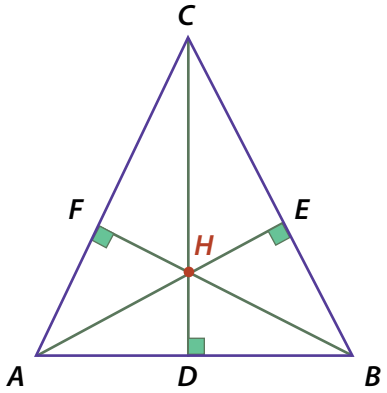
- Finalmente, se repite el procedimiento sobre el lado AB.





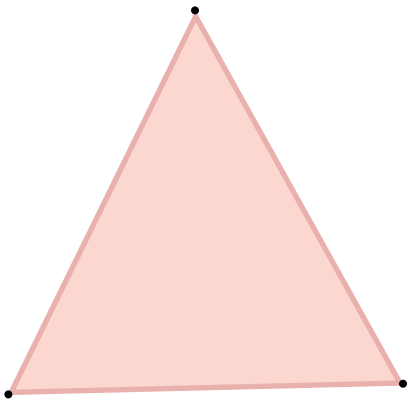
Actividad 82

1 **Observe el triángulo y escriba los pares de segmentos perpendiculares**

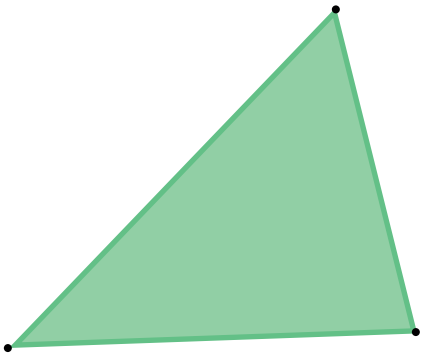


2 **Nombre los vértices de cada triángulo acutángulo; luego, trace las alturas en cada uno.**

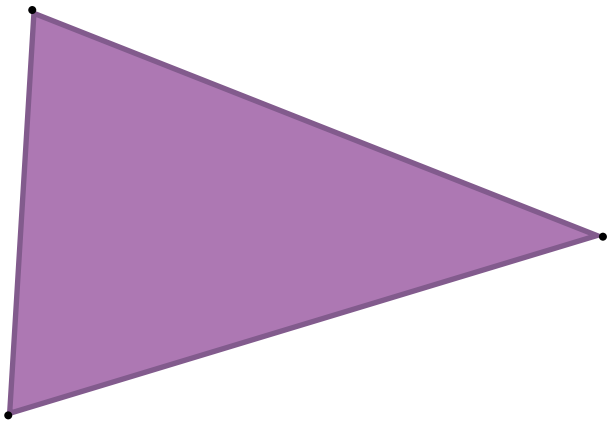
a)

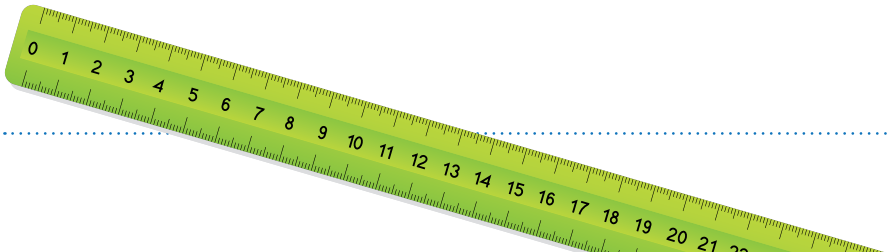


b)



c)





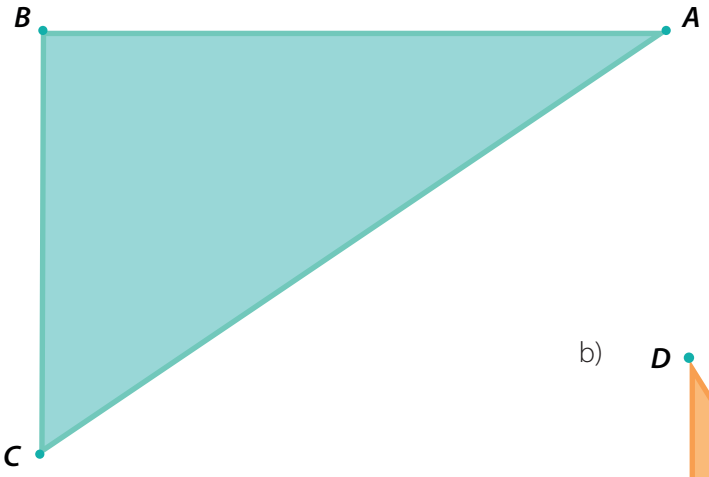
Clase 25

Actividad 83

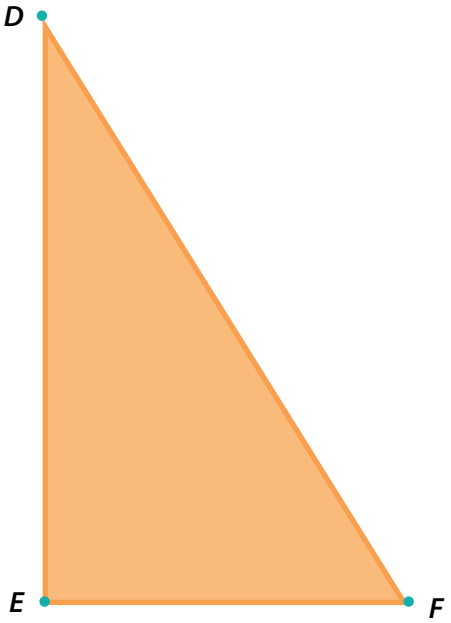
1 Lea la siguiente información.

2 Trace las alturas sobre los siguientes triángulos.

a)



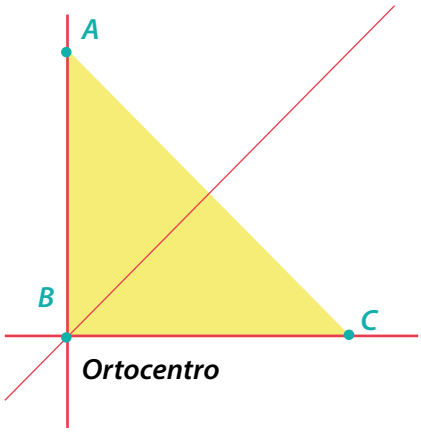
b)



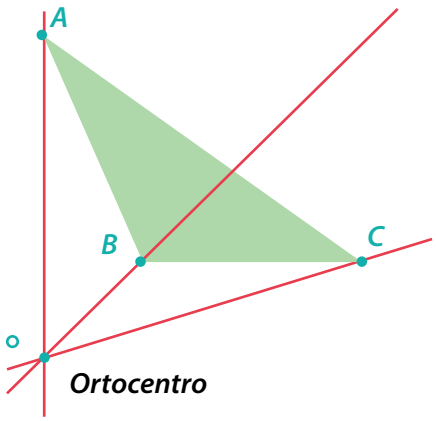
Actividad 84

1 Lea la información y observe los triángulos.

El punto de corte entre las alturas de un triángulo recibe el nombre de **ortocentro**.



El **ortocentro** en un **triángulo rectángulo** está ubicado en el vértice que forman los catetos.



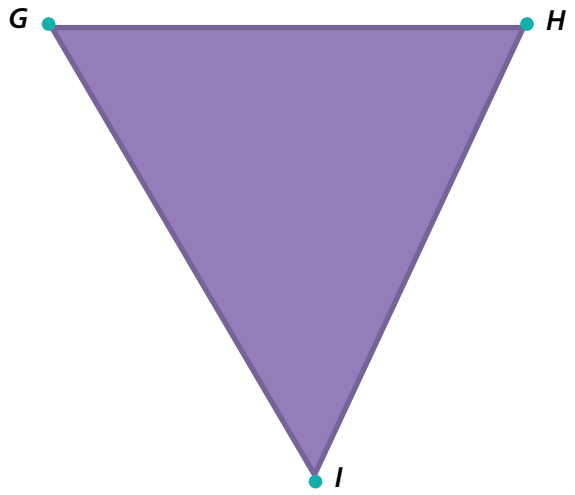
El **ortocentro** en un **triángulo obtusángulo** está ubicado exterior a él.

2 Construya un triángulo equilátero de lado 8 cm, trace las alturas y localice el ortocentro. Luego, escriba en dónde está ubicado el ortocentro en un triángulo acutángulo.

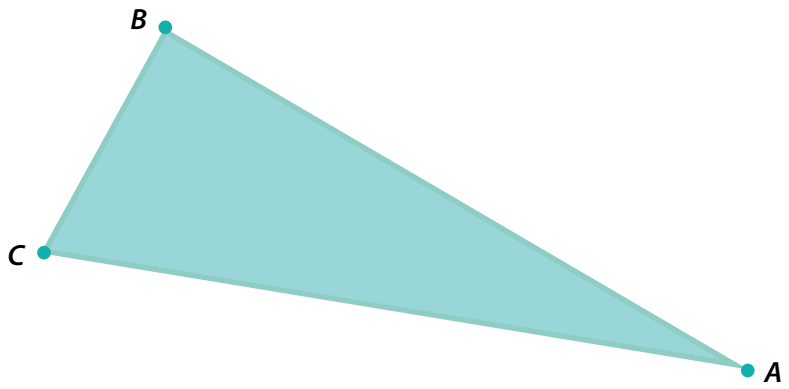
Actividad 85

En cada triángulo trace las alturas y ubique el ortocentro.

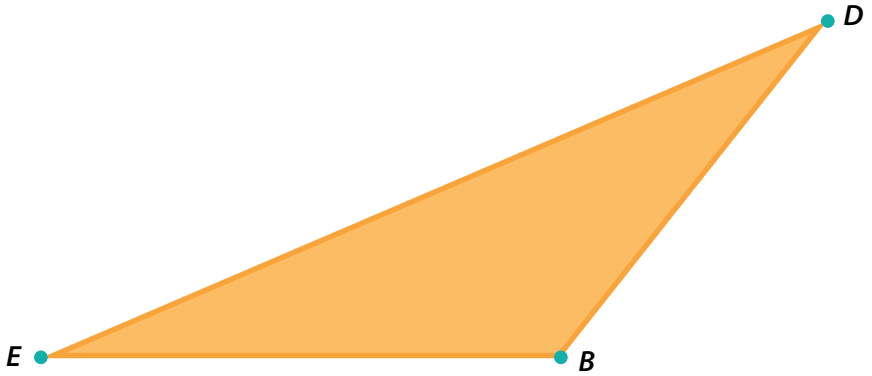
1



2



3



Clase 26

Actividad 86

Lea con atención cada pregunta; luego, marque la respuesta que considera correcta. Justifique su elección.

1 ¿En qué tipo de triángulo coincide una altura con un lado?

A. En el triángulo obtusángulo
B. En el triángulo rectángulo
C. En el triángulo equilátero
D. En el triángulo acutángulo isósceles

2 El ortocentro en un triángulo rectángulo se encuentra

A. Dentro del triángulo
B. En el vértice del triángulo
C. Fuera del triángulo
D. Sobre la hipotenusa

3 En una oficina, Carlos debe ubicar un teléfono a igual distancia de los escritorios de sus tres secretarias Andrea, Merly y Claudia. De las siguientes opciones ¿cuál cree usted que Carlos debe escoger para determinar el punto donde debe quedar ubicado el teléfono?

A. Trazar las mediatrices y ubicar el circuncentro
B. Trazar las bisectrices y ubicar el incentro
C. Trazar las medianas y ubicar el baricentro
D. Trazar las alturas y ubicar el ortocentro

Actividad 87

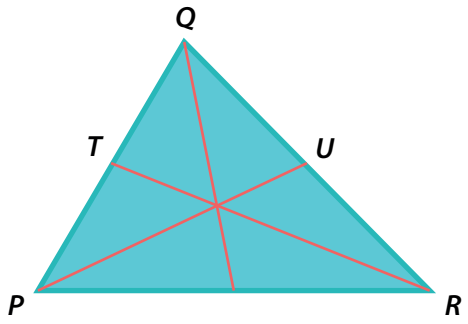
Una cada definición con el nombre correspondiente.

1. Recta perpendicular a un lado del triángulo en su punto medio.	**Ortocentro**
2. Punto de intersección entre las bisectrices.	**Altura**
3. Segmento perpendicular desde uno de los vértices hasta el lado opuesto.	**Mediatriz**
4. Punto de intersección entre las mediatrices.	**Bisectriz**
5. Segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto.	**Incentro**
6. Divide el ángulo en dos ángulos congruentes.	**Baricentro**
7. Punto de intersección entre las alturas.	**Mediana**
8. Punto de intersección entre las medianas.	**Circuncentro**

Actividad 88

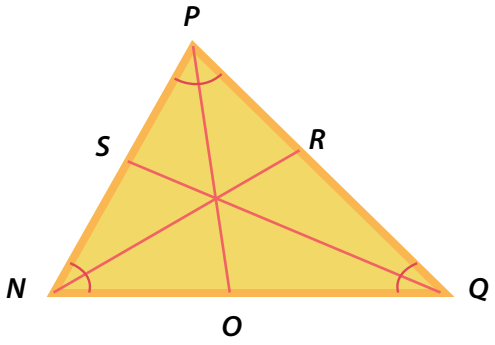
Observe con atención las líneas trazadas en cada triángulo y marque qué líneas son.

1



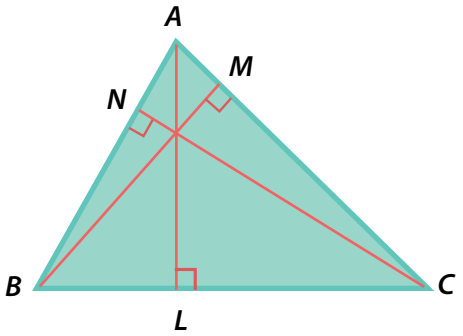
- [ ] Alturas
- [ ] Medianas
- [ ] Mediatrices
- [ ] Bisectrices

2



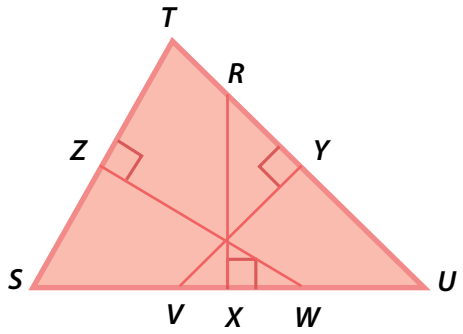
- [ ] Alturas
- [ ] Medianas
- [ ] Mediatrices
- [ ] Bisectrices

3



- [ ] Alturas
- [ ] Medianas
- [ ] Mediatrices
- [ ] Bisectrices

4

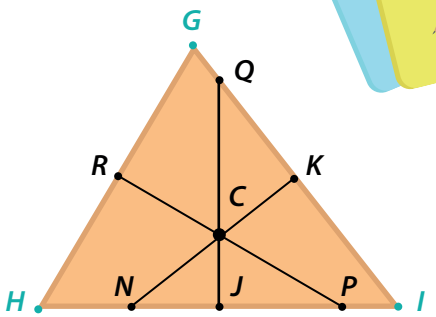


- [ ] Alturas
- [ ] Medianas
- [ ] Mediatrices
- [ ] Bisectrices

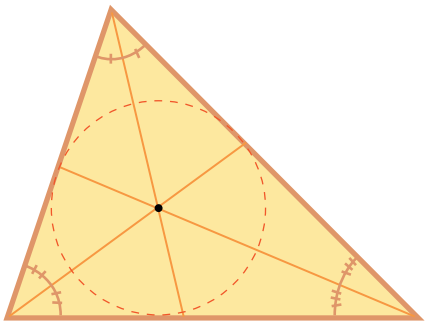
Resumen

En todo triángulo se pueden identificar las siguientes **líneas notables**: mediatrices, bisectrices, medianas y alturas.

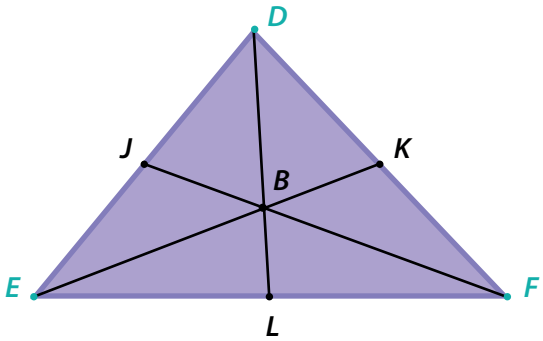
La **mediatriz** de un segmento es una recta perpendicular que pasa por su punto medio. El punto de corte entre las mediatrices de un triángulo se llama **circuncentro**.



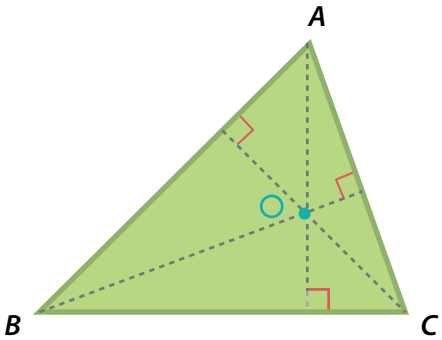
La **bisectriz** de un ángulo es una semirrecta que lo divide en dos ángulos congruentes. En un triángulo, la **bisectriz**, se considera como un segmento. El punto de corte de las tres bisectrices de un triángulo se denomina **incentro**.



La **mediana en un triángulo** es el segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto. El punto de corte entre las medianas de un triángulo se denomina **baricentro**.



La **altura** de un triángulo es el segmento perpendicular que va desde un vértice hasta la recta que contiene al lado opuesto a este. Las tres alturas de un triángulo se cortan en un punto llamado **ortocentro**.

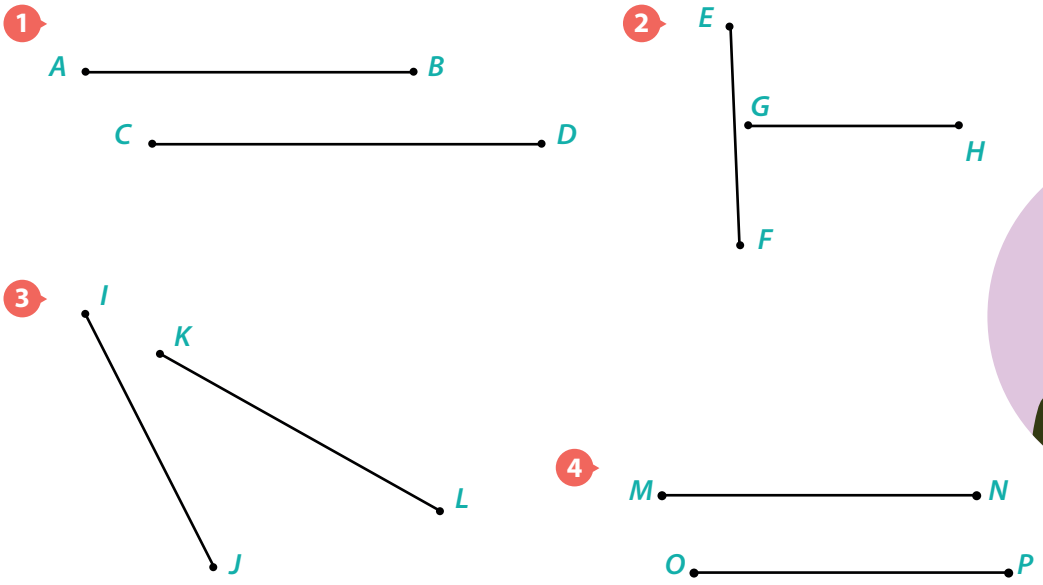


Clase 27 Esta clase tiene video

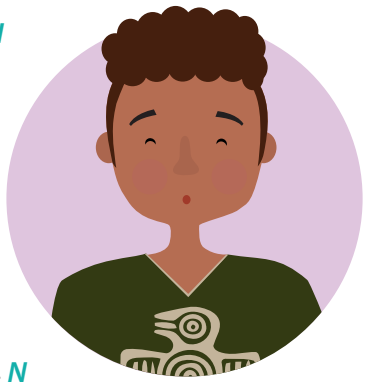
Tema: Congruencia de triángulos, criterios de congruencia

Actividad 89

Utilice regla para determinar cuáles de los siguientes segmentos son congruentes.

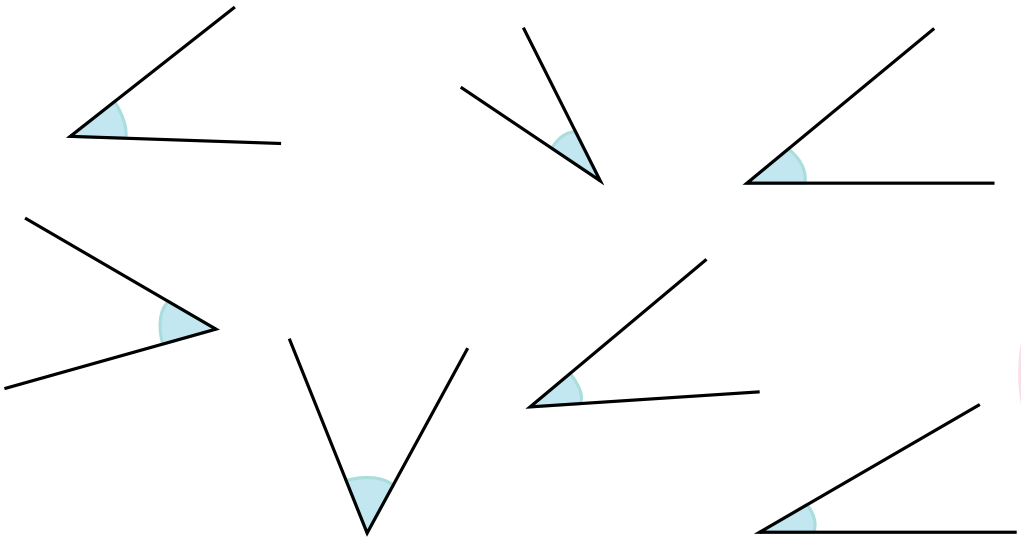


Dos **segmentos** son congruentes cuando tienen la misma longitud.



Actividad 90

Mida los siguientes ángulos y una con una línea los que tienen la misma medida.

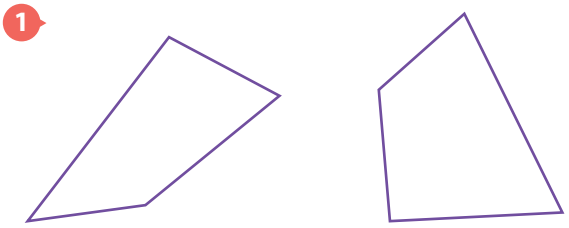


Dos **ángulos** son congruentes cuando tienen la misma amplitud.

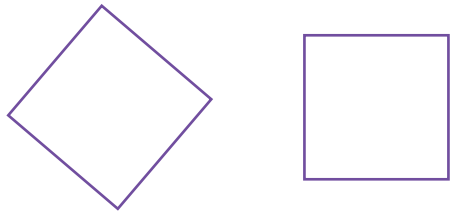
Actividad 91

Calque cada par de figuras y determine cuáles son congruentes.

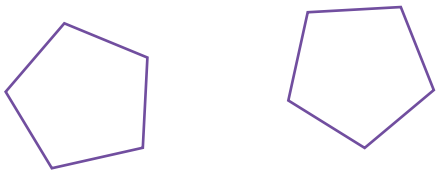
1



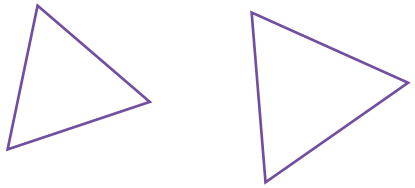
2



3



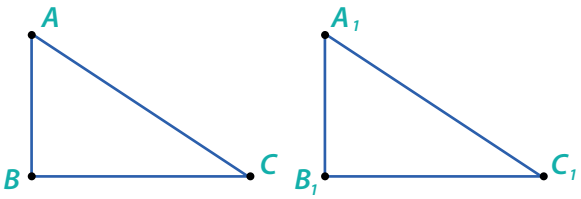
4



Actividad 92

Los siguientes pares de triángulos son congruentes. Seleccione la proposición correcta. De ser necesario, use alguna herramienta que le permita verificar su respuesta.

1

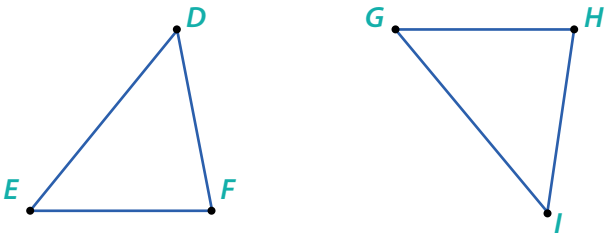


a) $\triangle ABC \cong \triangle A_1 B_1 C_1$

b) $\triangle ACB \cong \triangle A_1 B_1 C_1$

c) $\triangle CBA \cong \triangle B_1 A_1 C_1$

2

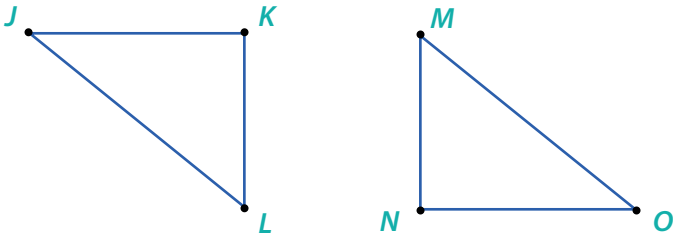


a) $\triangle DEF \cong \triangle GIH$

b) $\triangle DFE \cong \triangle IGH$

c) $\triangle EFD \cong \triangle HIG$

3



a) $\triangle JKL \cong \triangle MNO$

b) $\triangle JLK \cong \triangle ONM$

c) $\triangle LKJ \cong \triangle MNO$

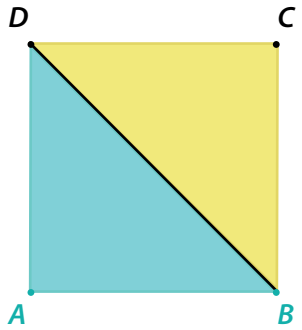
Clase 28 Esta clase tiene video

Tema: Congruencia de triángulos, criterios de congruencia

Actividad 93

1 Lea con atención la siguiente explicación.

En el cuadrado ABCD, se trazó la diagonal descrita por el segmento BD, así que el cuadrado quedó dividido en dos triángulos: ΔABD y ΔBCD. Vamos a demostrar que estos dos triángulos son congruentes.

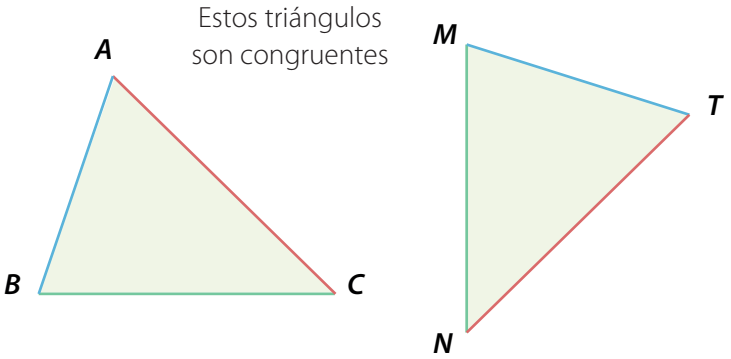


Dos triángulos son congruentes cuando sus ángulos internos y sus segmentos correspondientes son congruentes entre sí.

- Podemos observar que $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ y $\overline{AD} \cong \overline{CD}$, ya que son lados de un cuadrado.
- De otro lado, $\overline{BD} \cong \overline{BD}$, pues son el mismo segmento.
- Además, $\angle BAD \cong \angle BCD$, porque ambos son rectos.
- También se tiene que debido a que los dos triángulos son rectángulos e isósceles, $\angle DBA \cong \angle DBC$ y $\angle BDA \cong \angle BDC$.
- De donde se puede concluir que ΔABD y ΔBCD son congruentes.

2 Lea la información.

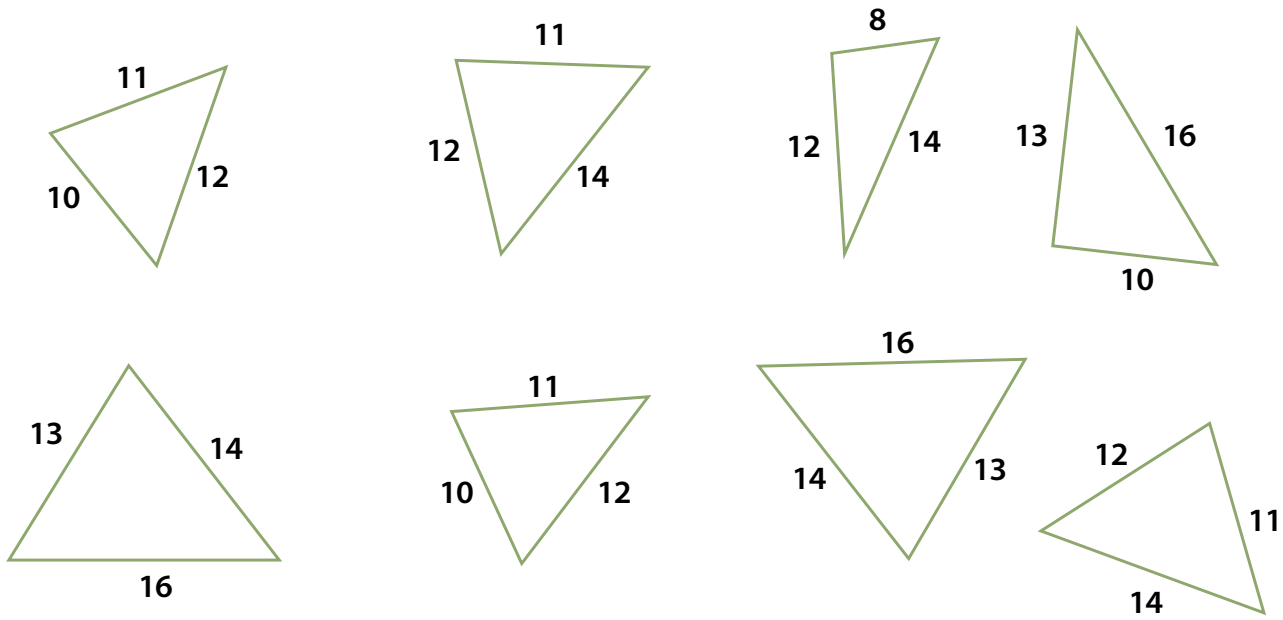
Para determinar que dos triángulos son **congruentes** se usan los **criterios de congruencia**. Uno de los criterios es Lado-Lado-Lado, que se abrevia **(LLL)**.



Si los tres lados de un triángulo son respectivamente congruentes con los tres lados de otro triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes.

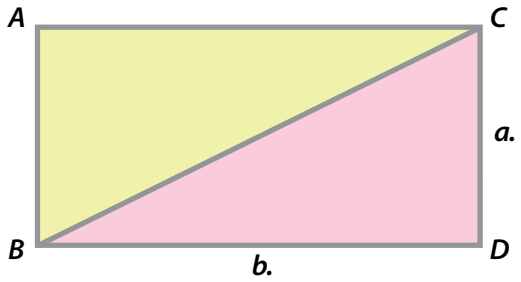
Actividad 94

Coloree del mismo color los triángulos que sean congruentes entre sí.



Actividad 95

Al dibujar una diagonal en un rectángulo, ¿se forman dos triángulos congruentes entre sí? Justifique su respuesta.



Actividad 96

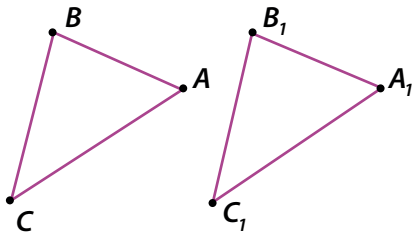
Complete la tabla de tal manera que los tres triángulos sean congruentes entre sí. Tenga en cuenta la desigualdad triangular.

Triángulo	Lado	Lado	Lado
ΔABC	AB = 6	BC =	AC =
ΔDEF		EF = 10	
ΔGHI			

Actividad 97

Cada par de triángulos es congruente entre sí, entonces escriba cada proposición correctamente. Lea detenidamente el ejemplo del punto 1.

1



$\triangle ABC \cong \triangle A_1 B_1 C_1$

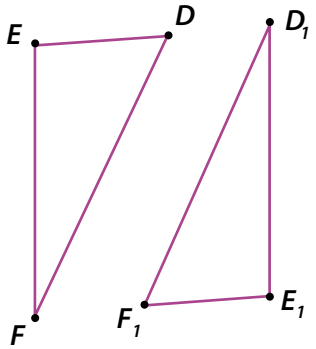
Porque

$\overline{AB} \cong \overline{A_1 B_1}$

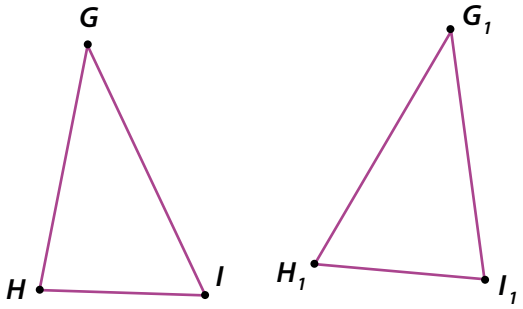
$\overline{BC} \cong \overline{B_1 C_1}$

$\overline{AC} \cong \overline{A_1 C_1}$

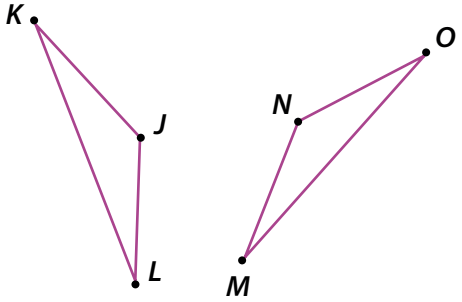
2



3



4



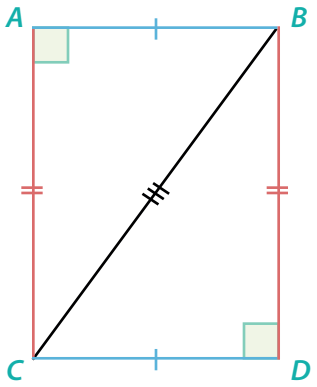
Clase 29 Esta clase tiene video

Tema: Congruencia de triángulos, criterios de congruencia

Actividad 98

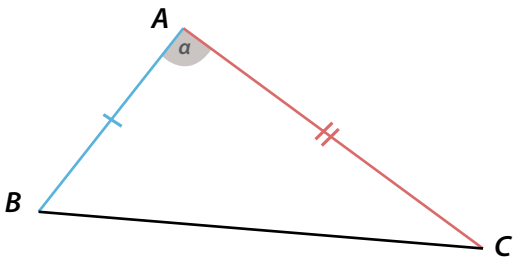
Observe y lea con atención el criterio de congruencia de triángulos Lado-Ángulo-Lado (LAL).

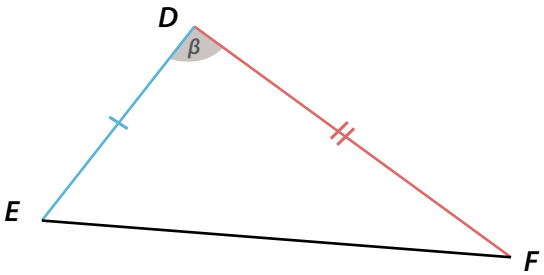
Al trazar en el rectángulo *ABCD* una de sus diagonales se generan dos triángulos congruentes.



Estos dos triángulos son congruentes debido al criterio (**LAL**):

- Los segmentos $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{AC} \cong \overline{BD}$ porque son lados opuestos de un rectángulo.
- El $\angle BAC \cong \angle CDB$ ya que son rectos.
- Entonces $\triangle ABC \cong \triangle DCB$



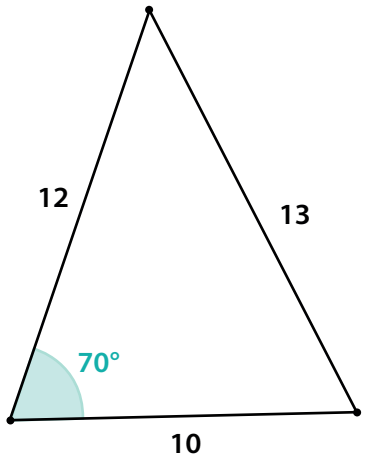


"Si dos lados de un triángulo y el ángulo comprendido entre ellos son respectivamente congruentes con dos lados y el ángulo comprendido entre ellos de otro triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes".

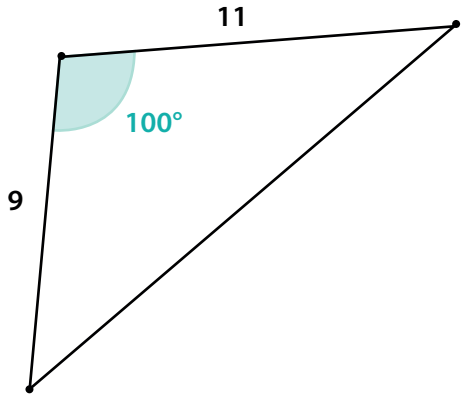
Actividad 99

Utilice el criterio de congruencia de triángulos LAL para construir un triángulo congruente a cada uno de los siguientes triángulos. No olvide usar regla, compás y transportador si es necesario.

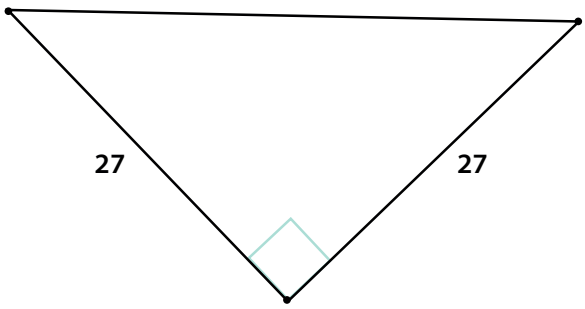
1



2

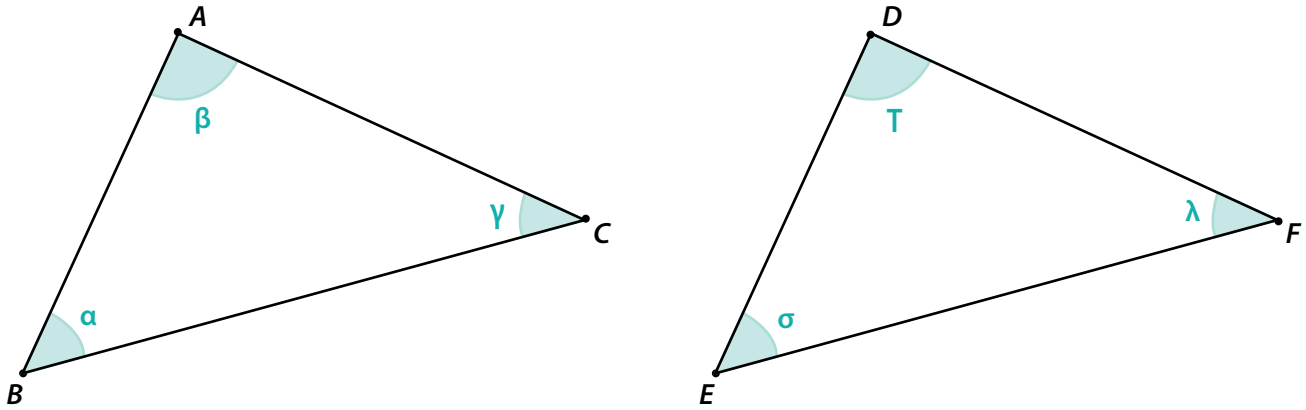


3



Actividad 100

Escriba los segmentos o los ángulos de tal modo que se pueda concluir la congruencia entre ambos triángulos aplicando el criterio indicado.



1. Criterio LLL

$\overline{AB} \cong$ _____ _____ $\cong \overline{DF}$ $\overline{BC} \cong \overline{EF}$

2. Criterio LAL

_____ $\cong$ _____ $\beta \cong \tau$ _____ $\cong$ _____

Actividad 101

Escriba verdadero (V) o falso (F) según sea el caso, y justifique su respuesta si escribió Falso (F). Si escribió Verdadero (V), escriba en virtud de qué criterio lo hizo. Tenga en cuenta los criterios vistos.

1. ☐ Dos triángulos son congruentes si tienen dos lados congruentes.

_____

2. ☐ Dos triángulos equiláteros con el mismo perímetro son congruentes entre sí.

_____

3. ☐ Dos triángulos son congruentes únicamente si es posible establecer la congruencia entre todos los lados y ángulos correspondientes de los mismos.

_____

4. ☐ Dos triángulos rectángulos cuyos catetos son congruentes, son congruentes.

_____

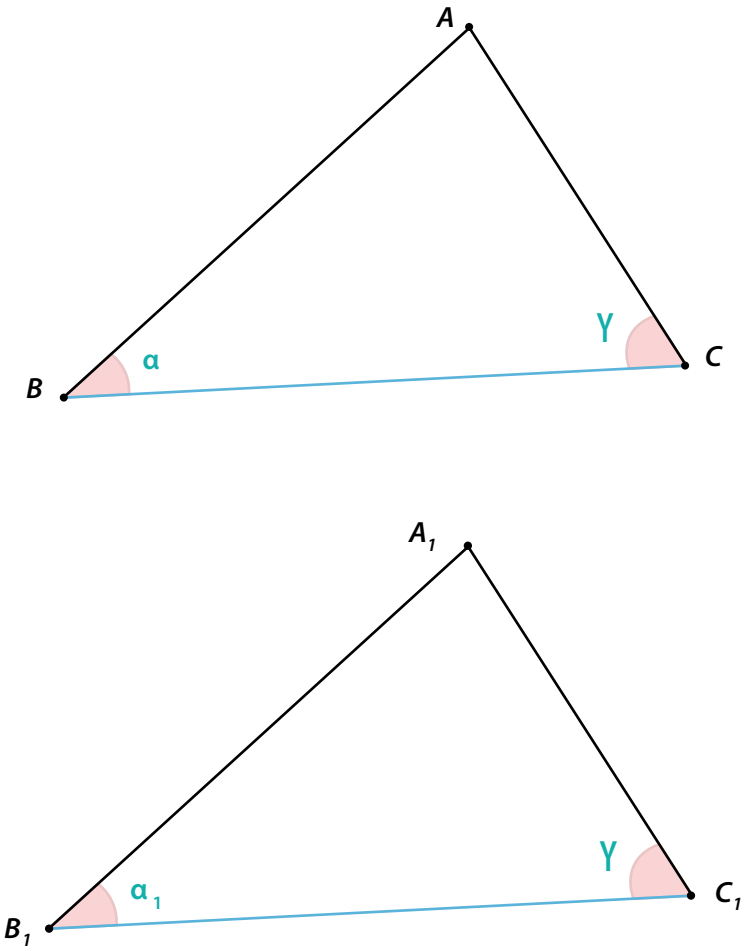
Clase 30 Esta clase tiene video

Tema: Congruencia de triángulos, criterios de congruencia

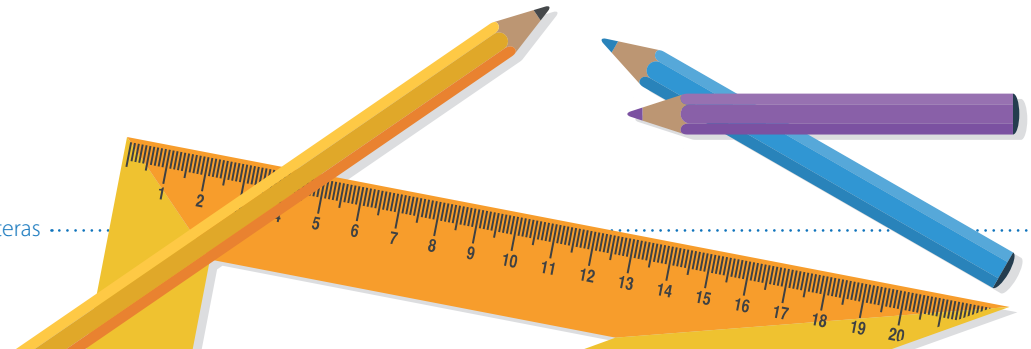
Actividad 102

Lea atentamente el tercer criterio de congruencia de triángulos. Realice una comprobación en su cuaderno.

Dado el triángulo $\triangle ABC$, dibujemos un segmento $\overline{B_1C_1} \cong \overline{BC}$ y dos ángulos tales que sus vértices sean respectivamente B_1 y C_1 y que además $\alpha_1 \cong \alpha$ y $\gamma_1 \cong \gamma$. Los lados no coincidentes de los ángulos se encontrarán en un punto A_1 de tal modo que el triángulo $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$.



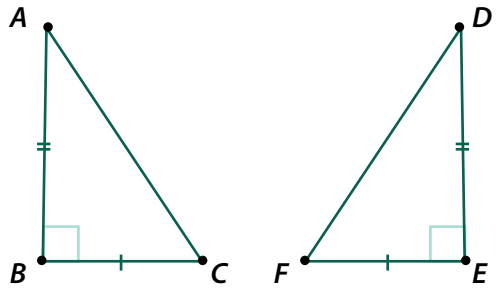
"Si dos ángulos de un triángulo y el lado comprendido entre ellos son respectivamente congruentes con dos ángulos y el lado comprendido de otro triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes".



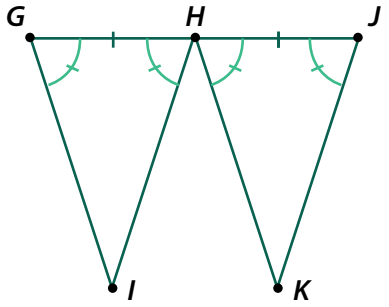
Actividad 103

Determine el criterio de congruencia para cada par de triángulos congruentes y escriba los lados y ángulos correspondientes congruentes entre sí.

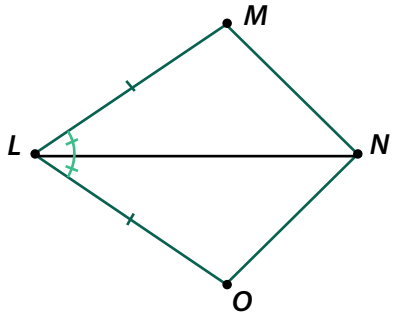
1



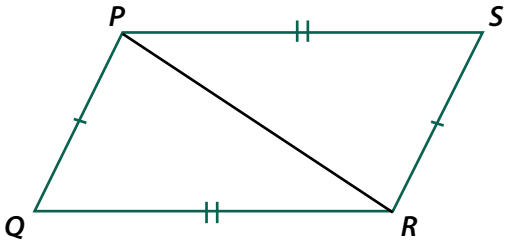
2



3



4



Actividad 104

Lea la información y determine si cada par de triángulos es congruente. Justifique su respuesta.

1. $\overline{AB} \cong \overline{A_1 B_1}$

   $\angle BAC \cong \angle B_1 A_1 C_1$

   $\angle ABC \cong \angle A_1 B_1 C_1$

2. $\angle BAC \cong \angle B_1 A_1 C_1$

   $\angle ABC \cong \angle A_1 B_1 C_1$

   $\angle ACB \cong \angle A_1 C_1 B_1$

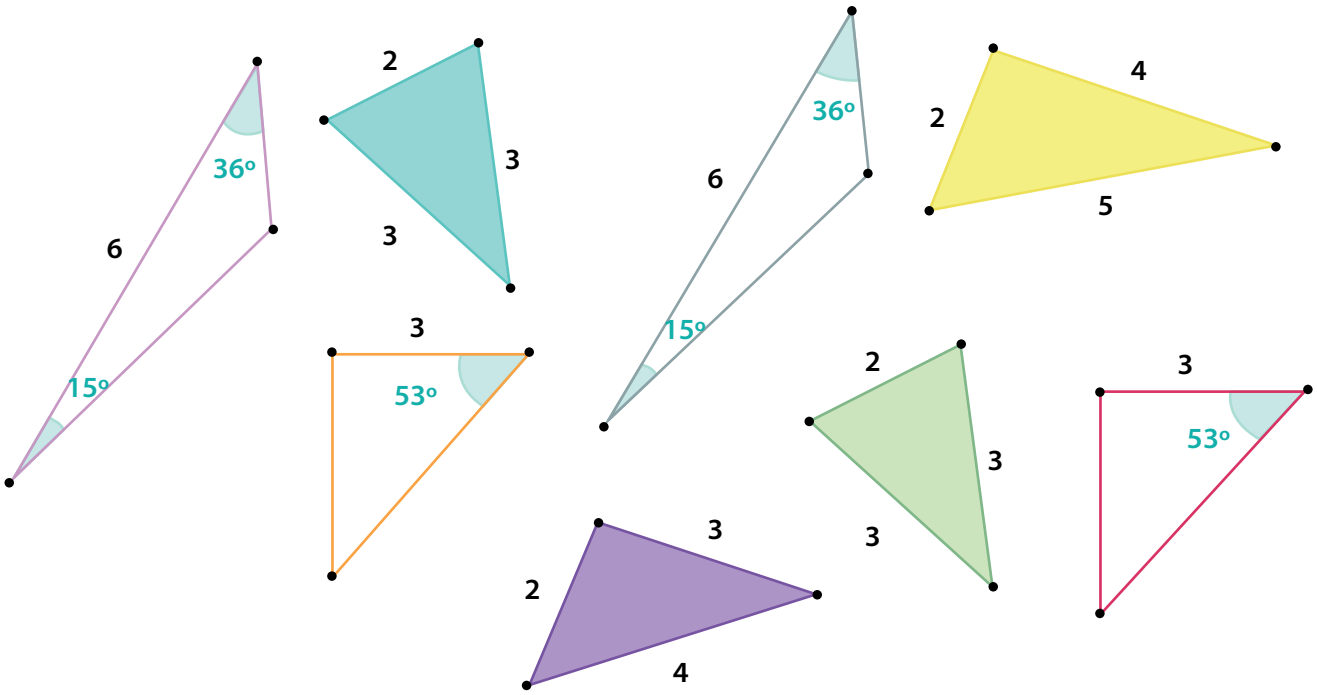
3. $\overline{AB} \cong \overline{A_1 B_1}$

   $\overline{BC} \cong \overline{B_1 C_1}$

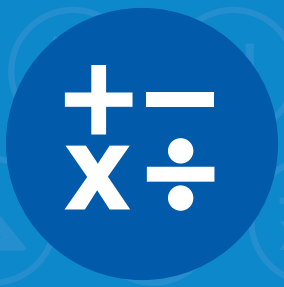
   $\overline{AC} \cong \overline{A_1 C_1}$

Actividad 105

Identifique los triángulos congruentes. Justifique su respuesta.



CUARTO BIMESTRE



Clase 1 Esta clase tiene video

Tema: Simplificación de fracciones algebraicas

Actividad 1

Lea la siguiente información.

Una **fracción algebraica** es el cociente entre dos expresiones algebraicas, donde cada una es un monomio o un polinomio.

1 **Escriba 5 ejemplos de fracciones algebraicas.**

a) Ejemplo 1:

b) Ejemplo 2:

c) Ejemplo 3:

d) Ejemplo 4:

e) Ejemplo 5:

2 **Simplifique las siguientes fracciones algebraicas representadas por monomios. Para ello, utilice las propiedades de la potenciación y exprese el resultado con exponentes positivos.**

a) $\frac{15xy}{3y} =$

b) $-\frac{27xy^2}{36yz} =$

c) $\frac{24b^6c^7d}{-8ab^{10}c^3} =$

d) $\frac{125r^{14}s^{20}t^{-12}}{5r^{14}s^{-22}t^{-10}} =$

Simplificar una fracción algebraica significa convertirla en una fracción equivalente cuyos términos sean primos entre sí.

Actividad 2

1 **Encuentre el numerador o el denominador de las siguientes fracciones algebraicas.**

a) $\frac{\square}{ab} = \frac{a}{b}$

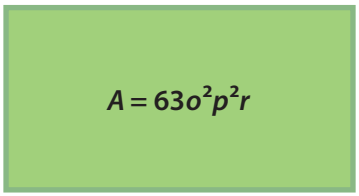
b) $\frac{6m^2n^3}{\square} = 2mn^3$

c) $\frac{\square}{3a^8b^9c} = \frac{1}{3a^3b^2c}$

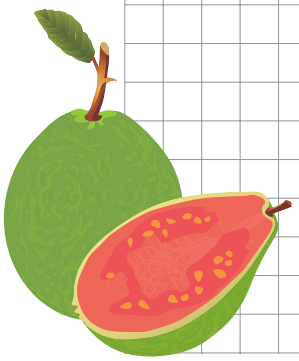
d) $\frac{54x^9y^{11}z^{13}}{\square} = \frac{6}{7xyz^2}$

2 **Resuelva la siguiente situación.**

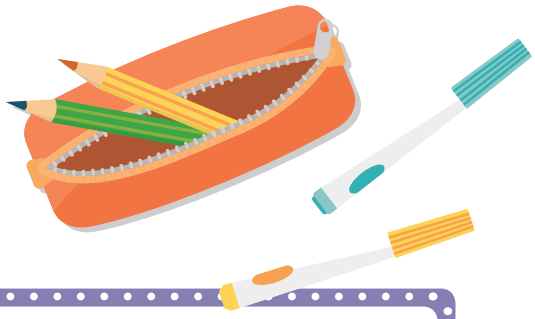
Una parcela rectangular ha sido destinada para el cultivo de guayaba agria; su área está dada por la expresión algebraica $A = 63o^2p^2r$ y su largo por la expresión $l = 42o^2p^3q$. Escriba la expresión algebraica que determina el ancho de la parcela.



$l = 42o^2p^3q$



Clase 2



Actividad 3

1 **Lea la siguiente información para la simplificación de fracciones cuyos términos son polinomios y observe el ejemplo.**

Se **factorizan** los polinomios del numerador y/o el denominador y se simplifican los factores comunes. Por ejemplo:

$$\frac{4a^2b^3}{24a^3b^3 - 36a^3b^4} = \frac{4a^2b^3}{12a^3b^3\,(2-3b)} = \frac{1}{3a(2-3b)}$$

2 **Simplifique las siguientes fracciones algebraicas.**

a) $\dfrac{z^2 - 25}{z^3 - 125} =$

b) $\dfrac{a^2 + 3a + 2}{a^2 + 5a + 6} =$

c) $\dfrac{a^3 + 1}{a^4 - a^3 + a - 1} =$

d) $\dfrac{xy}{3x^2y + 3xy^2} =$

e) $\dfrac{3b^2 - 4b - 15}{b^2 - 5b + 6} =$

Actividad 4

Complete cada expresión para que las fracciones sean equivalentes.

Dos fracciones algebraicas $\frac{A}{B}$ y $\frac{C}{D}$ son **equivalentes** si los productos cruzados son iguales.

Es decir $A \cdot D = B \cdot C$

1. $\frac{x^2 - y^2}{\square} = x - y$

2. $\frac{a^2 + a}{\square} = \frac{a}{1}$

3. $\frac{x^2 - y^2}{x^3 - y^3} = \frac{x + y}{\square}$

4. $\frac{a^2 - a - 6}{\square} = a - 3$

5. $\frac{6x^2 + 7x - 3}{\square} = \frac{(2x + 3)}{y}$

6. $\frac{\square}{18t^2 - 27t + 10} = \frac{1}{6t - 5}$

Actividad 5

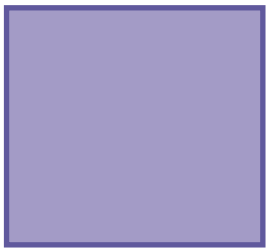
1 **Coloree del mismo color las fracciones algebraicas de la tabla que son equivalentes.**

$\frac{3a^2b + 9ab}{6a^3}$	$\frac{b - 2a}{3ab^2}$	$\frac{9a^2b - ab}{3ab^2}$	$\frac{ab + 3b}{2a^2}$	$\frac{9a - 1}{3b}$	$\frac{3ab^2 - 6a^2b}{9a^2b^3}$

2 **Tarea. Encuentre la dimensión que hace falta en cada una de las figuras geométricas.**

a) Área $= z^2 - 81$, Largo $= z + 9$

b) Área $= 9a^2 - 6ab + b^2$, Ancho $= 3a - b$



Clase 3 Esta clase tiene video

Actividad 6

1 Lea los pasos que se deben seguir para multiplicar fracciones algebraicas.

- Se factoriza el numerador y el denominador de cada fracción, si es posible.
- Se multiplican los numeradores entre sí y los denominadores entre sí.
- Se simplifican los factores comunes.

2 Multiplique las siguientes fracciones. Use el procedimiento descrito en el numeral anterior.

a) $\frac{-2x^3y}{5x^2} \cdot \frac{10x^4}{3x^2y^2} =$

b) $\frac{-5t^2}{6u^2} \cdot 24u^2 =$

c) $\frac{4p^3}{pq} \cdot \frac{5p^5q}{2p} =$

d) $\frac{-2x^3y}{3a+6} \cdot (3a+6) =$

e) $\frac{18x^3}{4y^2-6y} \cdot \frac{2y}{x^2} =$

f) $\frac{ax}{a+x} \cdot \frac{x}{a} \cdot \frac{a}{x} =$

Actividad 7

Escriba cada multiplicación como una expresión racional y simplifique.

Tenga en cuenta que, si es posible, debe factorizar antes de multiplicar.

Y luego, debe simplificar los factores en el numerador y el denominador.

1. $\dfrac{-4a+14}{9a+12} \cdot \dfrac{-9a-12}{10a+35} =$

2. $\dfrac{x^3-y^3}{x^2-2x-15} \cdot \dfrac{x+3}{x-y} =$

3. $\dfrac{3ab^2-27ax^2}{3} \cdot \dfrac{1}{ab+3ax} =$

4. $\dfrac{6x^3+2x-3x^2-1}{2x-1} \cdot \dfrac{2x+1}{3x^2+1} =$

5. $\dfrac{x^2-4}{3x-9} \cdot \dfrac{x^2-9}{2x+4} =$

6. $\dfrac{2c^2-6c}{2c^2+c-15} \cdot \dfrac{2c^2+3c-20}{6c^2-18c} =$

Actividad 8

Encuentre el área de las siguientes figuras geométricas.

1

$\frac{4x-8}{2x-4}$

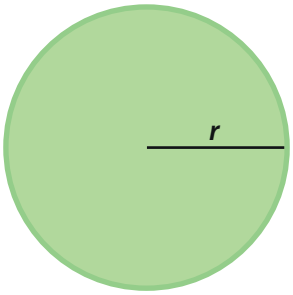
$\frac{8x+4}{16x-8}$

2

$\frac{x^2-9}{x^2+4x+3}$

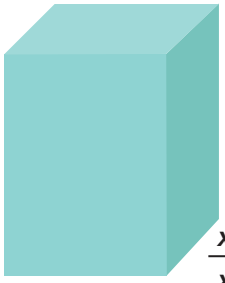
$\frac{4x-8}{2x-4}$

3



$radio = \frac{t-3}{2t-6}$

4 **Encuentre el volumen de la siguiente figura geométrica.**



$\frac{x^2-9}{x^2-x-6}$

$\frac{x+4}{x+3}$

$\frac{x}{x+4}$

Clase 4

Actividad 9

1 **Lea la información que se debe seguir para dividir fracciones algebraicas.**

Para **dividir dos fracciones algebraicas**, se multiplica el dividendo por el inverso multiplicativo del divisor. Por ejemplo si A y B son expresiones algebraicas se tendría que:

$$\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C}$$

2 **Resuelva las divisiones planteadas.**

a) $\frac{6a^2}{5b^3} \div \frac{12a^3}{80b} =$

b) $\frac{12x}{5y^2} \div \frac{3}{10y} =$

c) $\frac{18a^3b^4c^2}{11r^3w^4} \div \frac{3ab^2c^5r^3}{33rw^5} =$

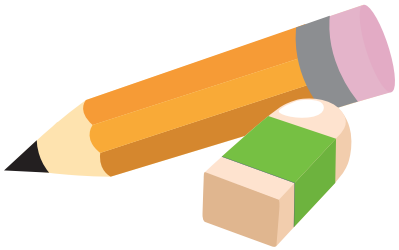
3 **Factorice, en caso de ser posible, las expresiones; luego, resuelva las divisiones.**

a) $\frac{h-1}{3} \div \frac{4h-4}{6h} =$

b) $\frac{t^4-t^2}{4t^2+12t} \div \frac{10t^2-10t}{4t+12} =$

c) $\frac{z^2+3z-18}{z} \div (z-3) =$

Actividad 10



Resuelva las siguientes divisiones teniendo en cuenta que en todas las expresiones se factoriza y simplifica antes que dividir.

1. $\dfrac{a^2 - b^2}{a + 1} \div \dfrac{a - b}{a^2 - 1} =$

2. $\dfrac{b^2 + 7b + 12}{b^2 + b - 12} \div \dfrac{b^2 + 3b + 9}{b^3 - 27} =$

3. $\dfrac{c^2 - 3cd + 2d^2}{cx + cy - dx - dy} \div \dfrac{c - 2d}{x + y} =$

4. $\dfrac{10x^2 - 2x}{18x^3} \div \dfrac{5x^2 - 11x + 2}{4x - 8} =$

5. $\dfrac{nx - ny + 2mx - 2my}{3x - 3y} \div (8m + 4n) =$

Clase 5

Actividad 11

Tres estudiantes realizaron la siguiente operación. Observe lo que cada uno hizo y la justificación que cada uno dió al último paso realizado. Responda cuál de los tres estudiantes tiene razón. Justifique su respuesta.

Estudiante 1

$$\frac{x+1}{x} \div \frac{x+1}{1} = \frac{x+1}{x} \cdot \frac{1}{x+1} = \frac{x+1}{x(x+1)} = \frac{0}{x}$$

Escribí 0, porque cuando simplifico no queda nada en el numerador.

Estudiante 2

$$\frac{x+1}{x} \div \frac{x+1}{1} = \frac{x+1}{x} \cdot \frac{1}{x+1} = \frac{x+1}{x(x+1)} = x$$

Me dio ese resultado porque al simplificar lo único que queda es *x*.

Estudiante 3

$$\frac{x+1}{x} \div \frac{x+1}{1} = \frac{x+1}{x} \cdot \frac{1}{x+1} = \frac{x+1}{x(x+1)} = \frac{1}{x}$$

Cuando simplifico, estoy dividiendo el numerador entre el denominador entre $x + 1$; por eso en el numerador obtengo 1 y en el denominador *x*.

Respuesta y justificación.

Actividad 12

1. **A continuación se muestra un ejemplo en el cual se simplifica una expresión algebraica en la que hay más de una operación de división o de multiplicación. Lea atentamente la información.**

Para simplificar la siguiente expresión, se siguen los pasos que se enuncian a continuación:

$$\frac{3a}{4b} \cdot \frac{8b}{9a} \div \frac{c^2}{3a^2}$$

Paso 1. $\frac{3a}{4b} \cdot \frac{8b}{9a} \cdot \frac{3a^2}{c^2}$ (escribir el inverso multiplicativo de $\frac{c^2}{3a^2}$)

Paso 2. $\frac{1}{1} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{a^2}{c^2}$ (simplificar)

Paso 3. $\frac{2a^2}{c^2}$ (multiplicar numeradores entre sí y denominadores entre sí)

2 **Simplifique las siguientes expresiones**

a) $\frac{2a}{b^2} \cdot \frac{5x}{4a^2} \div \frac{5a}{b} =$

b) $\frac{3a-3}{2a+2} \cdot \frac{a+1}{a-1} \div \frac{a^2+a}{a^2+a-2} =$

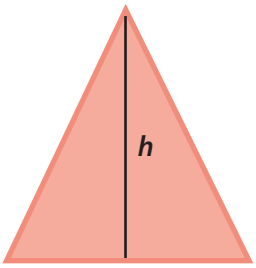
c) $\frac{f^2-8f+7}{f^2-11f+30} \cdot \frac{f^2-36}{f^2-1} \div \frac{f^2-f-42}{f^2-4f-5} =$

d) $\frac{a^2+1}{3a-6} \div \left(\frac{a^3+a}{6a-12} \cdot \frac{4x+8}{x-3} \right) =$

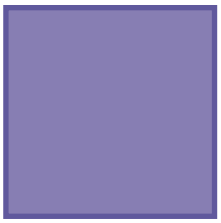
e) $\frac{8p^2-10p-3}{6p^2+13p+6} \cdot \frac{4p^2-9}{3p^2+2p} \div \frac{8p^2+14p+3}{9p+12p+4} =$

Actividad 13

1 Considere el siguiente triángulo. Si su área es $3s^2 + 7s + 2$, y su base $3s + 1$, determine su altura.

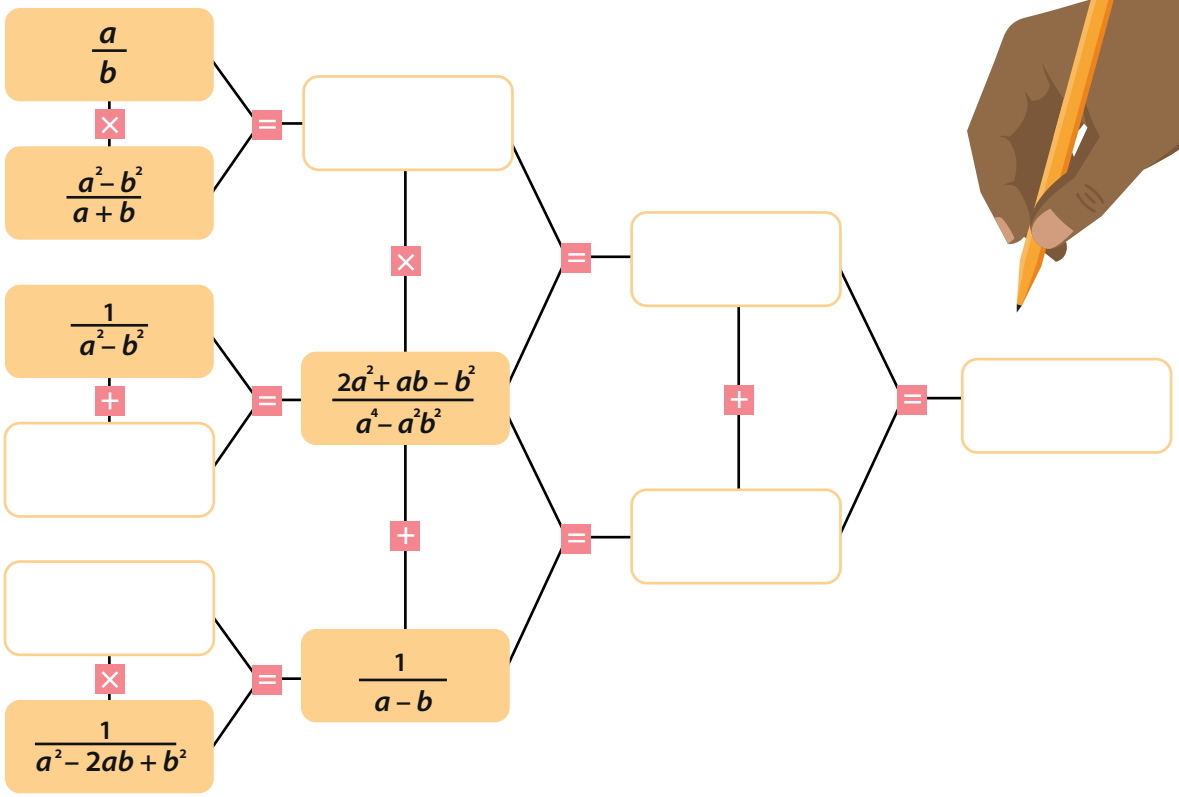


2 Considere el siguiente cuadrado. Si su área es $a^2 + 18a + 81$, y su base $a + 9$, determine su altura.



Actividad 14

Escriba las expresiones racionales que completan el esquema.



Clase 6

Tema: Adición y sustracción de fracciones algebraicas

Actividad 15

Calcule el máximo común divisor (m.c.d.) de los siguientes conjuntos de números.

1 {45, 18, 27}

Recuerde que...
El m.c.d. de dos o más números es el mayor de los divisores comunes de dichos números.

2 {32, 48, 40}

3 {24, 72, 120}

Actividad 16

1 **Lea los pasos para hallar el máximo común divisor (m.c.d.) entre dos monomios.**

Primero. Calcular el máximo común divisor de los coeficientes.

Segundo. Identificar las variables comunes entre los monomios, con su menor exponente.

Tercero. Escribir el producto entre el m.c.d. de los coeficientes y las variables comunes a todos los monomios con el menor exponente.

2 **Encuentre el error que cometío Juana al hallar el m.c.d. de los monomios $15a^3b^2$ y $21a^2b^4c$.**

El m.c.d. de 15 y 21 es 3.

Las variables comunes entre los monomios con el menor exponente son a^3, b^2, c

Por lo tanto, el m.c.d. de los dos monomios es $3ab^2c$.

Actividad 17

¿Cuál es el m.c.d. de los siguientes polinomios? Escoja una de las tres posibles respuestas.

1 $2m^2 - 6m - 20$; $6m^2 - 24$

Respuesta 1: $2(m - 2)$

Respuesta 2: $2(m + 2)$

Respuesta 3: $2(2 - m)$

2 $3p^3 + 15p^2$; $4p^4 + 500p$

Respuesta 1: $p(p + 5)$

Respuesta 2: $p^2(p + 5)$

Respuesta 3: $p(p - 5)$

3 $x^6 - x^2y^4$; $x^4 - 2x^3y + x^2y^2$

Respuesta 1: $x^2(x - y)^2$

Respuesta 2: $x(x - y)$

Respuesta 3: $x^2(x - y)$

4 $x^2 + 6x + 9$; $x^2 - 9$

Respuesta 1: $(x + 3)$

Respuesta 2: $(x - 3)$

Respuesta 3: $(x + 3)^2$

Clase 7 Esta clase tiene video

Tema: Adición y sustracción de fracciones algebraicas

Actividad 18

Complete la siguiente adición de fracciones algebraicas siguiendo cada paso hasta llegar a la respuesta.

$$\frac{8a^2b}{4ab^3}+\frac{6a^4b^2}{4ab^3}+\frac{12ab^3}{4ab^3}$$

Se suman los numeradores y se escribe el denominador común.

Se factoriza el numerador.

Se simplifica (si es posible).

Por lo tanto, $\frac{8a^2b}{4ab^3}+\frac{6a^4b^2}{4ab^3}+\frac{12ab^3}{4ab^3}=\frac{4a+3a^3b+6b^2}{2b^2}$

Actividad 19

Realice las siguientes adiciones.

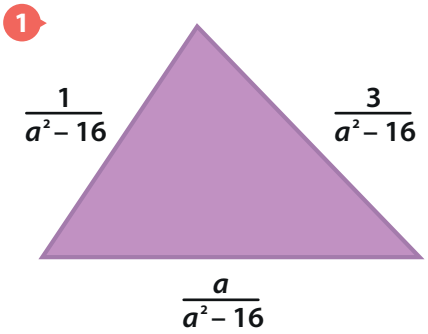
1. $\frac{2x^2y}{x+y}+\frac{5x^3y}{x+y}=$

2. $\frac{m^2}{m+n}+\frac{2mn}{m+n}+\frac{n^2}{m+n}=$

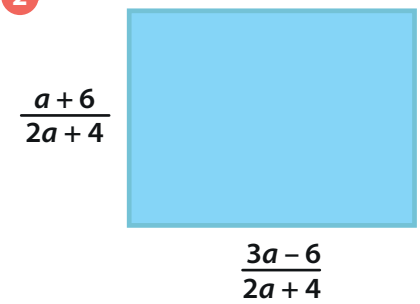
Actividad 20

Determine el perímetro de cada figura.

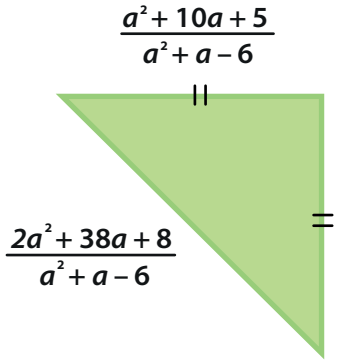
1



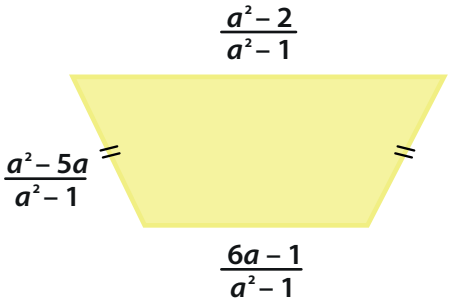
2



3



4



Clase 8

Actividad 21

Una cada par de monomios con el mínimo común múltiplo (m.c.m.) correspondiente.

1 $25a^4bc\,;\,10a^3c^4$	$60a^8b^2c^6$
2 $81ab^5c^7\,;\,7a^2b^2c^8$	$a^6b^5c^3$
3 $12a^8c^6\,;\,5a^4b^2c^2$	$144a^3b^4c^2$
4 $16a^3bc^2\,;\,18ab^4$	$50a^4bc^4$
5 $a^4b^5c\,;\,a^6b^2c^3$	$81a^2b^5c^8$
6 $15a^2c^4\,;\,30a^3b^6$	$30a^3b^6c^4$

Recuerde que...
El m.c.m. de dos o más expresiones es el menor múltiplo común de dichas expresiones.

Actividad 22

Halle el m.c.m. de los siguientes polinomios.

1 $m^2 + m - 6\,;\,m^2 - 9$

2 $2p^2 + 3p - 5\,;\,p^3 - 1$

3 $w^2 + 13w + 40\,;\,3w^2 + 16w + 5$

4 $4x - 8\,;\,8x^2 - 20$

Actividad 23

Siga el paso a paso para realizar la suma de fracciones algebraicas con diferente denominador.

$$\frac{1}{x+1}+\frac{2x}{x^2-1}+\frac{1}{x-1}$$

Se calcula el m.c.m. de los denominadores.

Se escriben las fracciones equivalentes con denominador común, hallando los nuevos numeradores.

Se realiza la suma de fracciones algebraicas con denominador común obteniendo que:

$$\frac{1}{x+1}+\frac{2x}{x^2-1}+\frac{1}{x-1}=\frac{4x}{(x+1)(x-1)}$$

Actividad 24

Una con líneas cada adición con su respectivo resultado.

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$	$\frac{a}{a-b}+\frac{b}{a-b}$	$a+\frac{1}{b}$	$\frac{a}{b}+1$
$\frac{a+b}{a-b}$	$\frac{ab+1}{b}$	$\frac{a+b}{b}$	$\frac{b+a}{ab}$

Actividad 25

Sume y simplifique las siguientes fracciones algebraicas.

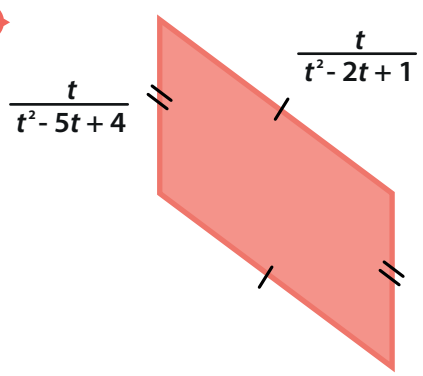
1. $\dfrac{1}{a^2-4}+\dfrac{2a+1}{a+2}+\dfrac{a}{a-2}=$

2. $\dfrac{w^2+3}{w^2+2w+1}+\dfrac{1}{(w+1)^2}=$

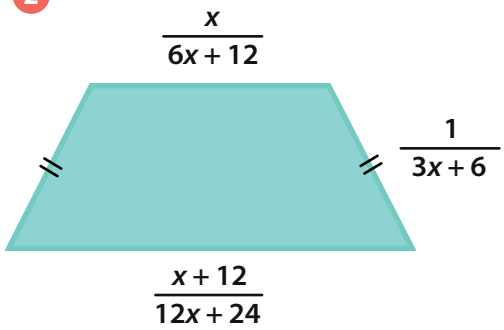
Actividad 26

Determine el perímetro de cada figura.

1.



2.

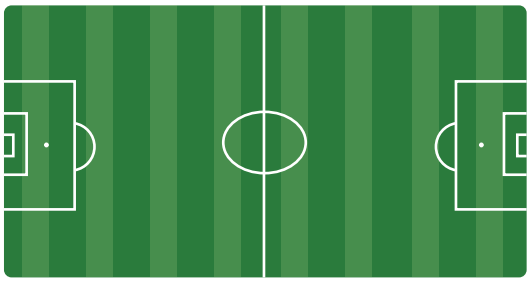


Clase 9

Tema: Adición y sustracción de fracciones algebraicas

Actividad 27

Escriba la expresión que representa la diferencia entre el largo y el ancho del terreno que se muestra en la figura.

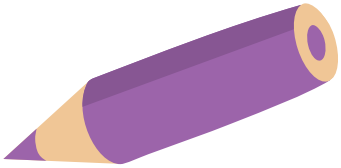


$$\frac{b^3}{a^2-b^2}$$

$$\frac{a^3}{a^2-b^2}$$

Actividad 28

Escriba los términos que faltan en las siguientes sustracciones.



1. $\frac{12x^2}{\square} - \frac{5x^2}{\square} - \frac{\square}{\square} = \frac{3x^2}{x+6}$

2. $\frac{12a^4b^3c}{15abc^2} - \frac{7a^4b^3c}{\square} - \frac{30a^4b^3c}{\square} = \frac{\square}{15abc^2}$

3. $\frac{4a^2-4}{a^2-4} - \frac{2a^2-8a}{a^2-4} - \frac{22a-a^2-20}{\square} = \frac{\square}{a^2-4}$

Actividad 29

¿Cuáles de las siguientes sustracciones están bien hechas? Identifique las correctas y corrija las incorrectas.

1. $\frac{3m+2}{10m} - \frac{3-2n}{3n} - \frac{n-m}{5mn} = \frac{29n+24}{30n}$

2. $\frac{x}{x^2-xy} - \frac{1}{x} - \frac{1}{y-x} = \frac{2}{y-x}$

3. $\frac{a}{a^2-b^2} - \frac{b}{a^2+ab} = \frac{b^2}{a(a^2-b^2)}$

4. $\frac{p}{p^2-2p+1} - \frac{1}{p^2+4p-5} = \frac{p^2+4p+1}{(p-1)^2(p+5)}$

Actividad 30

Resuelva las siguientes operaciones.

1. $\frac{11a}{a+1} - \frac{2a+4}{a+1} =$

2. $\frac{7p^3q}{7p^2q^3} + \frac{5p^2q}{pq^2} =$

3. $\frac{3m}{m^2-3m} - \frac{6}{m-3} =$

4. $\frac{2x^2}{4x^2-9} - \frac{3xy}{8x-12} =$

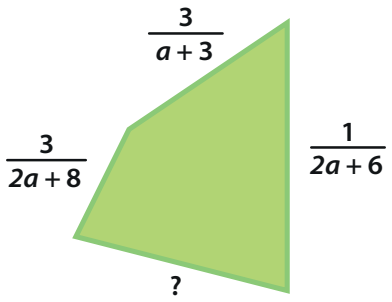
Clase 10

Tema: Adición y sustracción de fracciones algebraicas

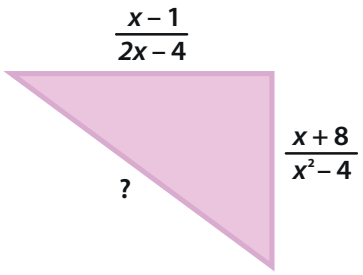
Actividad 31

Conociendo el perímetro de cada figura, encuentre la longitud del lado desconocido en cada una.

1. Perímetro $= \dfrac{14a + 53}{2a^2 + 14a + 24}$



2. Perímetro $= \dfrac{x + 4}{2(x - 2)}$

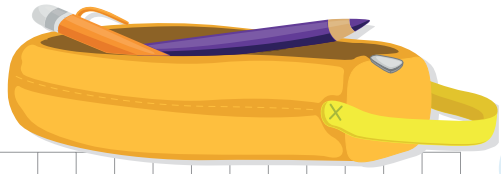


Actividad 32

Resuelva la siguiente expresión.

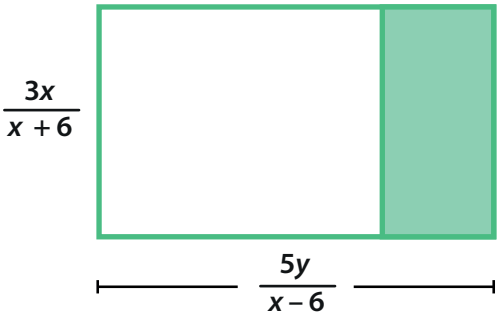
$$\frac{3a^2b^4}{7c^6} \times \frac{21c}{6a^5b} + \frac{10ab^2c^3}{14a^2} \div \frac{5a^3c^6}{7b} =$$

Actividad 33



Determine el área de la región no sombreada sabiendo el área de la región sombreada y las dimensiones del rectángulo mayor como se ve en la figura.

Área sombreada $= \dfrac{8xy + 7}{x + 6}$



Actividad 34

Resuelva las siguientes operaciones simplificando cuando sea necesario.

1. $\dfrac{4a}{a+1} \div \dfrac{3a^4}{a^2-1} \times \dfrac{a^2+2a}{8a} =$

2. $\left(\dfrac{3xy}{5z^6} \times \dfrac{6y}{4x^2z}\right) \div \dfrac{4x^6}{y^3} =$

3. $\dfrac{m+p}{m^2+2mp+p^2} + \dfrac{m+p}{m-p} \times \dfrac{m-p}{m+p} =$

4. $\left(\dfrac{a+b}{b}\right)\left(\dfrac{b}{a^2-b^2} - \dfrac{b}{a^2+ab}\right) =$

Resumen

Simplificación de fracciones algebraicas

Para **simplificar una fracción algebraica**, se divide el numerador y el denominador de la fracción por un polinomio que sea factor común de ambos.

Reducción de fracciones algebraicas a común denominador

Dadas dos fracciones algebraicas, reducirlas a común denominador es encontrar dos fracciones algebraicas equivalentes con el mismo denominador.

1. Descomponemos los denominadores en factores para hallar el mínimo común múltiplo, que será el común denominador.
2. Dividimos el común denominador entre los denominadores de las fracciones dadas y el resultado lo multiplicamos por el numerador correspondiente.

Suma y diferencia de fracciones algebraicas

La suma de fracciones algebraicas con **el mismo denominador** es otra fracción algebraica cuyo numerador es la suma de los numeradores con el mismo denominador.

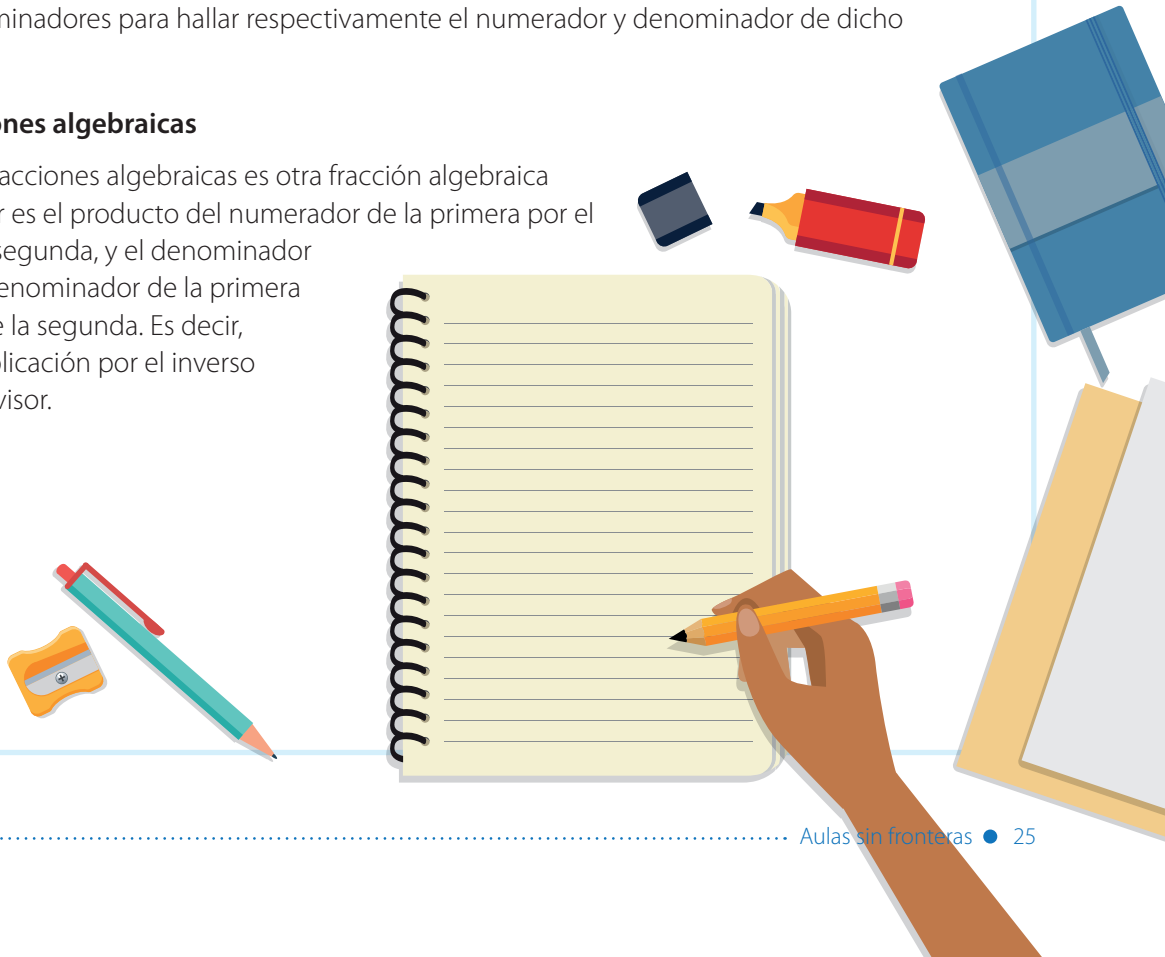
Para sumar fracciones algebraicas con **distinto denominador**, se halla **primero** el m.c.m. de los denominadores de dichas fracciones, **luego** se escriben las fracciones equivalentes y se suman los numeradores que se obtienen dividiendo el denominador común entre cada numerador.

Producto de fracciones algebraicas

El producto de dos fracciones algebraicas se obtiene al multiplicar todos los numeradores entre sí y también los denominadores para hallar respectivamente el numerador y denominador de dicho producto.

Cociente de fracciones algebraicas

El cociente de dos fracciones algebraicas es otra fracción algebraica donde el numerador es el producto del numerador de la primera por el denominador de la segunda, y el denominador es el producto del denominador de la primera por el numerador de la segunda. Es decir, se realiza una multiplicación por el inverso multiplicativo del divisor.



Clase 11 Esta clase tiene video

Tema: Funciones

Actividad 35

Un **par ordenado** es un conjunto de dos elementos y un criterio de ordenación.

1 **Lea la siguiente información.**

Si A y B son dos conjuntos no vacíos, el **producto cartesiano** entre A y B notado $A \times B$, es el conjunto de todos los pares ordenados cuyo primer componente es un elemento de A y cuyo segundo componente es un elemento de B.

2 **La tabla dada a continuación muestra el gusto que algunos estudiantes tienen por ciertas asignaturas.**

Estudiante (A)	Asignatura (B)
Pedro	Inglés
María	Matemáticas
Pedro	Historia
Claudia	Inglés
Claudia	Ciencias

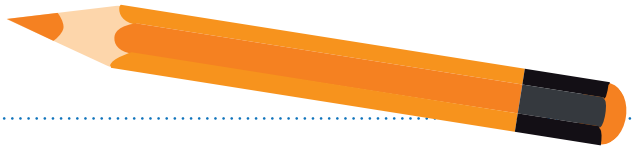
$X = \{$Pedro, María, Claudia$\}$

$Y = \{$Inglés, Matemáticas, Historia, Ciencias$\}$

R la relación definida de X en Y por
$R = \{(a,b) \in A \times B$, tal que a le gusta $b\}$

a) Elabore el diagrama de flechas de la relación.

b) Escriba R como un conjunto de pares ordenados



Actividad 36

1 **Escriba el producto cartesiano $X \times Y$ si $X = \{1, 2, 3\}$ y $Y = \{3, 6, 7\}$.**

2 **Escriba como un conjunto de pares ordenados cada una de las relaciones numéricas definidas con los conjuntos *X* y *Y* del numeral 1.**

a) $R_1 = \{(x, y) \in X \times Y / x < y\}$

$R_1 =$ _____

b) $R_2 = \{(x, y) \in X \times Y / x = 1\}$

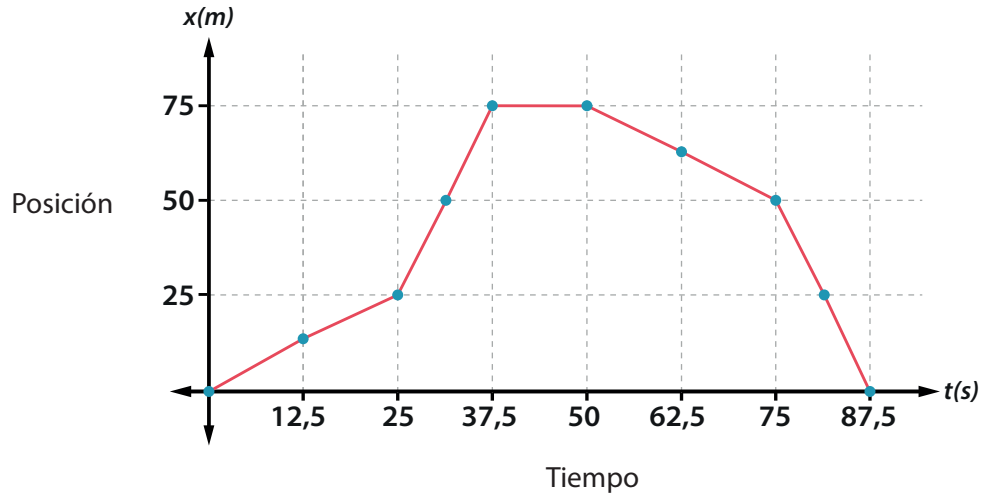
$R_2 =$ _____

c) $R_3 = \{(x, y) \in X \times Y / x + y > 4\}$

$R_3 =$ _____

Actividad 37

1 **La siguiente gráfica describe el comportamiento de dos magnitudes en el movimiento de un objeto.**



Con base en la gráfica, resuelva.

a) ¿Qué magnitudes están involucradas en la situación descrita?

b) ¿Qué magnitudes cambian en la situación descrita?

c) Indique para qué valor de *t* el objeto se encuentra a 75 m del punto de partida.

d) ¿Durante cuánto tiempo permaneció sin moverse, es decir, no cambio su posición con respecto al tiempo?

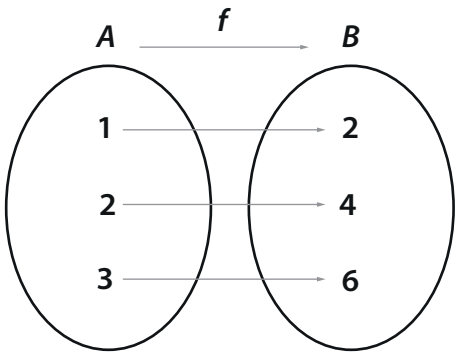
e) ¿Cuál es la posición a los 50 segundos?

f) ¿Cuál es la variable independiente y cuál es la variable dependiente en esta situación?

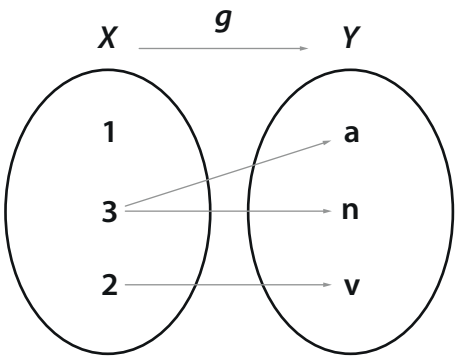
g) ¿Existe una relación de dependencia entre las variables *x* y *t*? Justifique su respuesta.

2 Observe detenidamente los diagramas de flechas correspondientes a las relaciones *f* y *g*. Indique cuál representa una función y cuál no.

a)



b)

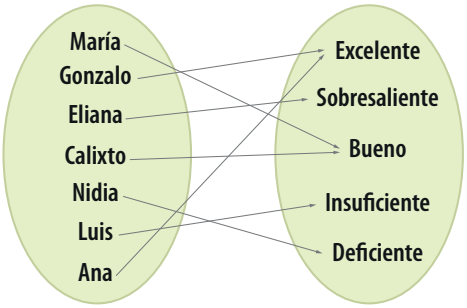


Clase 12

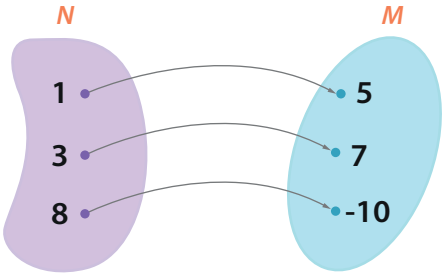
Actividad 38

1 **A continuación se presentan relaciones representadas de diferentes maneras; identifique cuáles de estas son funciones y escriba el dominio y el rango.**

a)



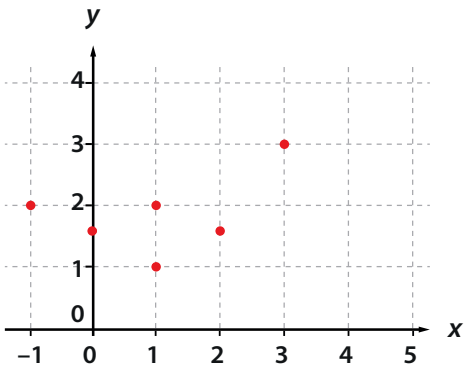
b)



c)

x	y
–1	8
0	2
1	0
2	2
3	8

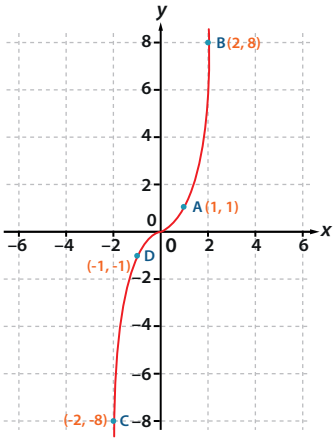
d)



Actividad 39

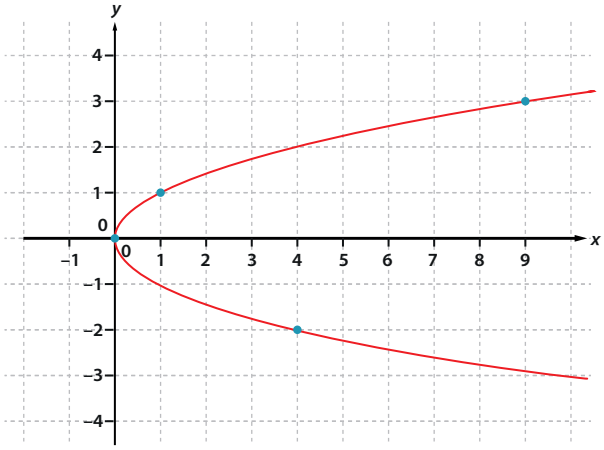
Observe las gráficas presentadas y para cada una, complete la tabla de valores en la que incluya cinco valores para la variable *x* y los cinco valores correspondientes para la variable *y*.

1



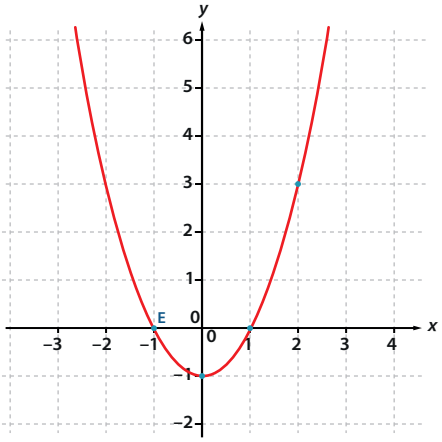
x					
y					

2



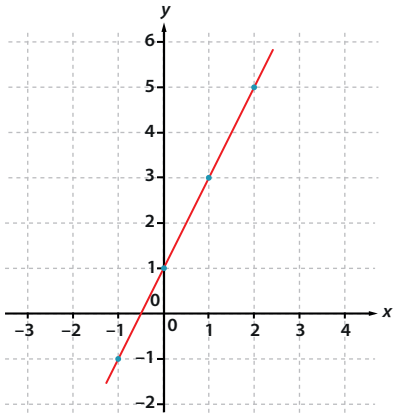
x					
y					

3



x					
y					

4

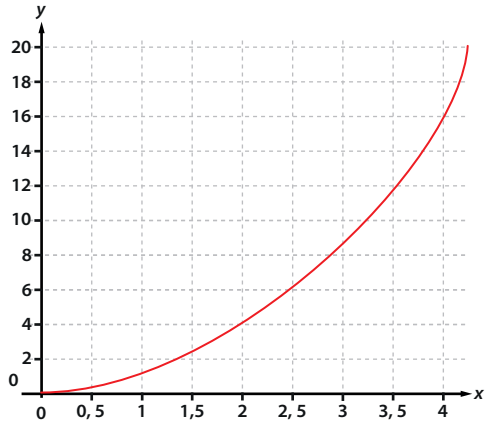


x					
y					

Actividad 40

1 **Lea la siguiente información.**

A continuación se muestra la gráfica en donde a cada valor posible para la longitud *x* del lado de un cuadrado, le corresponde un único valor de *y*, que es el área del respectivo cuadrado.



Es posible observar que el área depende de la medida del lado, teniendo en cuenta lo anterior es posible definir "el área de un cuadrado en función de la medida del lado" con la siguiente expresión:

$$y = x^2$$

La expresión $y = x^2$ también se puede escribir como $f(x) = x^2$.

2 **Complete la siguiente tabla de valores teniendo en cuenta la gráfica del numeral anterior en la cual se representa cómo varía el área de un cuadrado teniendo en cuenta la medida del lado.**

x	1	3	5	7	9
$f(x)$					

3 **Construya en su cuaderno los cuadrados que se generan a partir de la tabla de valores.**

4 **Responda en su cuaderno las siguientes preguntas.**

a) ¿Cuál es la variable independiente en la situación del cuadrado y su área?

b) ¿Cuál es la variable dependiente en la situación del cuadrado y su área?

c) ¿Cuál es la expresión general que determina el área de un cuadrado de lado *m*?

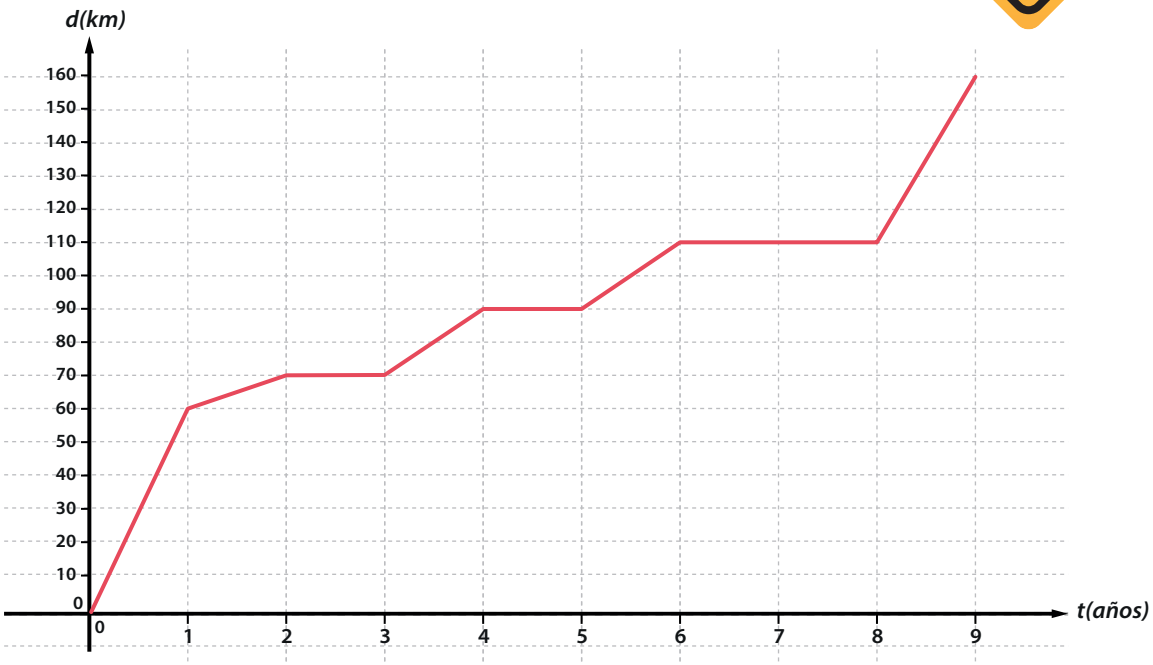
d) ¿Cuál sería el dominio y cuál sería el rango en esta situación?

Clase 13

Actividad 41

1 **Observe la gráfica con atención.**

La gráfica dada muestra los kilómetros construidos en la troncal del Pacífico en función del número de años empleados para su construcción.



2 **Con base en la gráfica anterior responda las siguientes preguntas:**

a) ¿Cuántos kilómetros se construyeron en el primer año? _____

b) ¿Cuántos kilómetros se construyeron entre el segundo y el quinto año? _____

c) Determine el valor de *d*(2), es decir, el número de kilómetros construidos durante los primeros dos años _____

d) Para construir los primeros 90 km, ¿cuántos años se emplearon? _____

e) ¿Cuántos kilómetros se construyeron durante los primeros 9 años? _____

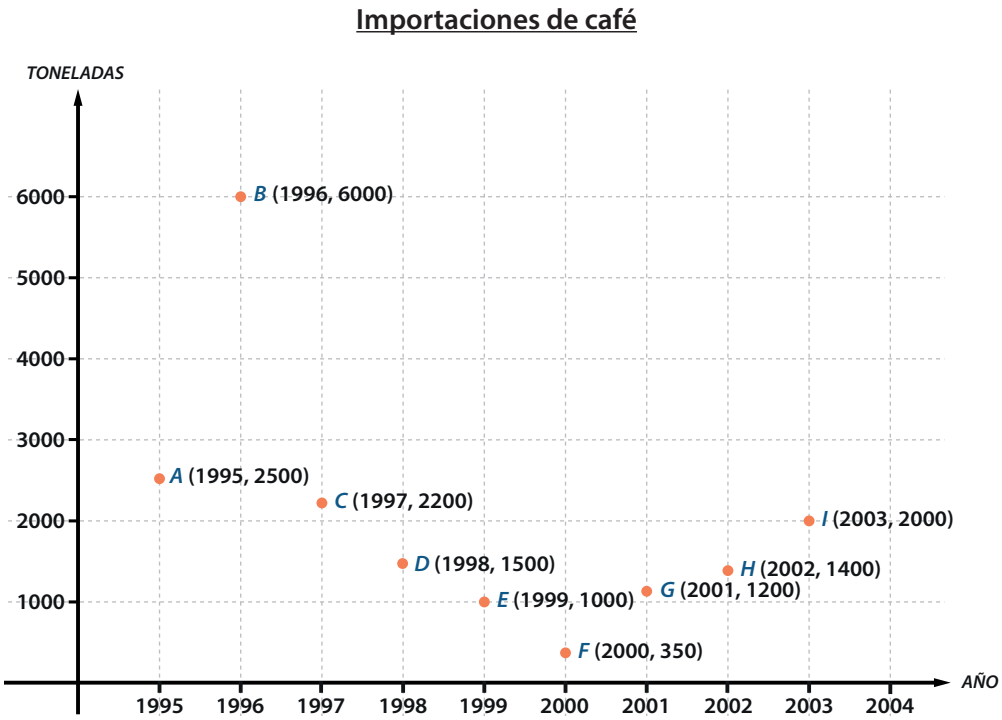
f) ¿En que años no se construyó ningún kilometro en la troncal del Pacífico? _____

3 **Complete la tabla de valores relacionada con la situación dada en la gráfica del numeral 1. Registre 8 valores diferentes.**

***t* (años)**								
***d* (kilómetros)**								

Actividad 42

Teniendo en cuenta la información de la gráfica dada responda las siguientes preguntas.



1. ¿Qué información representa la gráfica?

2. ¿Cuál es la variable independiente y cuál es la variable dependiente?

3. ¿Cuál es la diferencia entre el mayor valor de toneladas de café exportadas y el menor valor?

4. ¿La gráfica representa una función? Justifique su respuesta.

5. ¿Cuál es el mayor número de toneladas de café importadas y en qué año?

6. ¿Cuál es el menor número de toneladas de café importadas y en qué año?

Actividad 43

1 **Lea la información de la tabla y luego, responda las preguntas.**

Número de balones (*n*)	1	2	3	4	5	6
Precio (*p*)	20.000	40.000	60.000	80.000	100.000	120.000

a) ¿Qué tipo de información describe la tabla?

_____

b) ¿Qué sucede a medida que aumenta el número de balones?

_____

c) La expresión P(*n*) muestra la relación del precio que se paga dependiendo del número de balones que se compra. ¿Esta expresión representa una función? Justifique su respuesta.

_____

_____

d) ¿Cuál es la variable independiente? _____

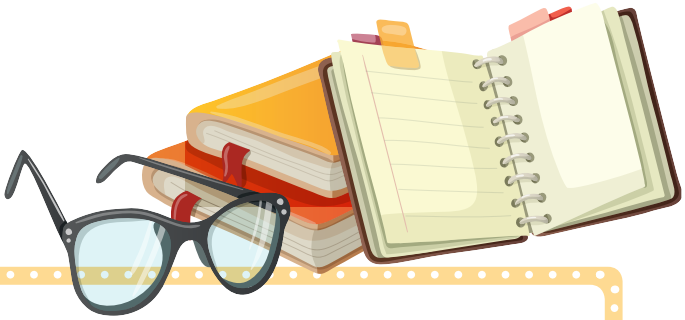
e) ¿Cuál es la variable dependiente? _____

2 **Teniendo en cuenta la tabla del numeral anterior, elabore la representación en el plano cartesiano de P(*n*).**

Tenga en cuenta:

- **Proponer una escala adecuada para los ejes.**
- **Poner a los ejes el nombre corresponiente a las variables.**

Clase 14



Actividad 44

Lea la siguiente información.

Es posible representar una función de las siguientes maneras:

Algebraica

Usando una fórmula:

$$f(x) = 3x + 4$$

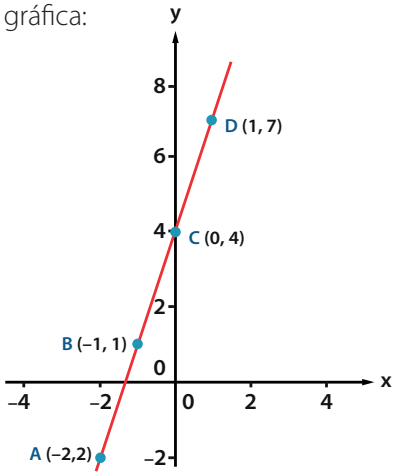
Verbal

Con palabras:

f es la función "multiplicar por 3 y luego sumar 4"
Relación de la variable x.

Visual

Usando una gráfica:



Numérica

Usando una tabla de valores:

x	$f(x)$
–2	–2
–1	1
0	4
1	7

Actividad 45

Para resolver los ejercicios de esta actividad, tenga en cuenta la información dada en la Actividad 44.

1. **Para transformar una temperatura *Celsius* (°C) en una temperatura en grados *Fahrenheit* (°F) se utiliza la expresión algebraica**

$$g(°C) = \frac{9}{5}\,°C + 32$$

Escriba esta función en forma verbal, en forma gráfica y en forma numérica.

a) Forma verbal

b) Forma gráfica

c) Forma numérica

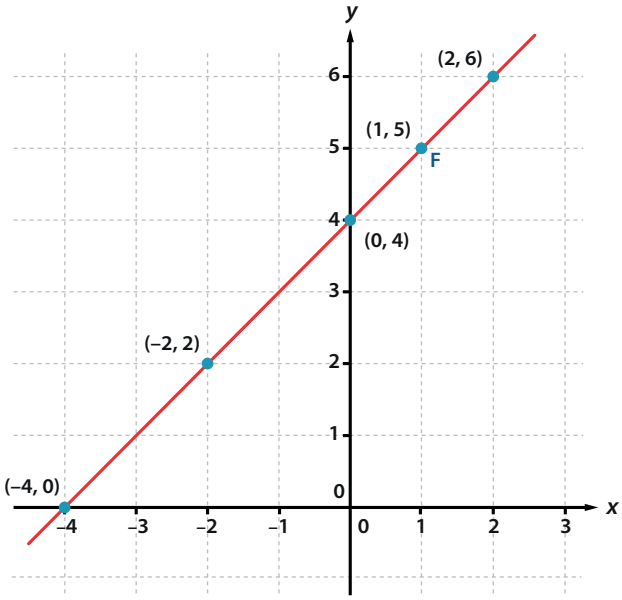
2 **Una función está definida verbalmente por la expresión: "elevar al cuadrado, luego sumar 2". Complete las formas de representación dadas a continuación:**

a) Algebraica. $f(x) =$ _____

b) Numérica.

x	$f(x)$
–2	6
–1	
0	
1	
3	
5	

3 **Una función *f* está representada gráficamente como se muestra a continuación.**



Represente la función de las formas que se solicitan en cada ejercicio.

a) Algebraicamente: _____

b) Numéricamente:

c) Verbalmente

Clase 15

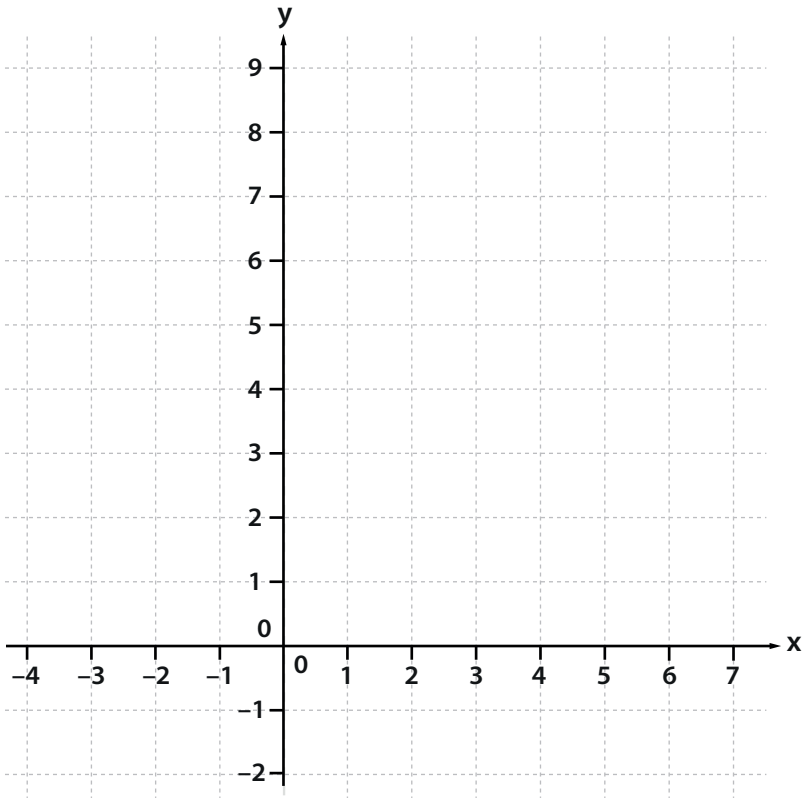
Actividad 46

1 **Algebraicamente una función está representada por $y = 2x + 3$.**

a) Complete la tabla de valores de la función:

$y = 2x + 3$		
x	y	(x, y)
-2	$y = 2(-2) + 3 = -1$	$(-2, -1)$
$-1,5$		
-1		
0		
$0,5$		
1		
$1,5$		
3		

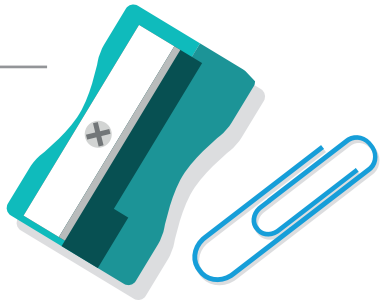
b) Ubique en el plano cartesiano los puntos de coordenadas (x, y) y únalas por medio de una línea continua. ¿Qué forma tiene la gráfica?



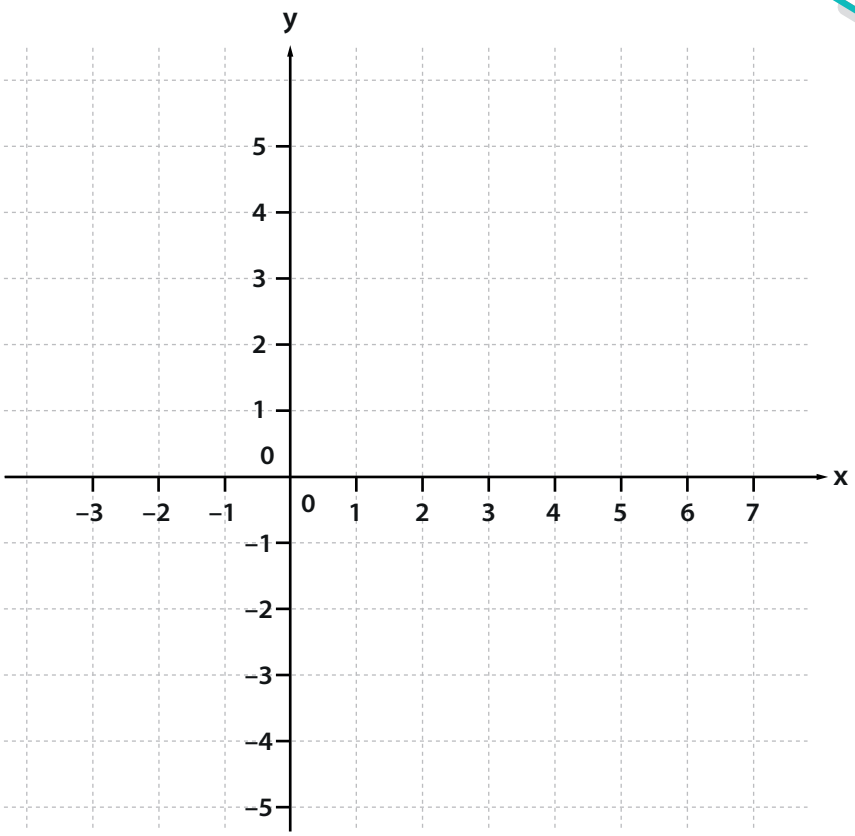
2 **Sea la función cuadrática $y = x^2 - 3x$**

a) Elabore la tabla de valores para los valores x indicados en la tabla dada.

x	y	(x, y)
–1	$y = (-1)^2 - 3(-1) = 4$	(–1, 4)
0		
1		
2		
3		
5		
6		
7		



b) Tomando los valores (x, y) de la tabla anterior, elabore la gráfica de la función. ¿Qué forma tiene la función?



Clase 16 Esta clase tiene video

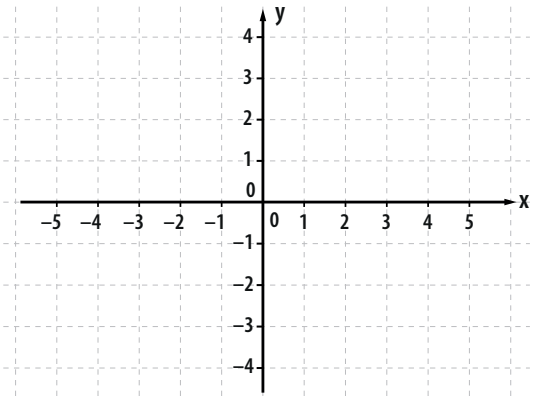
Tema: Función lineal

Actividad 47

Los puntos que se presentan en cada una de las siguientes tablas forman parte de una línea recta. Ubique los puntos en cada plano cartesiano y trace la recta. Luego, observe la gráfica y escriba en la tabla otros puntos por los que pase la recta.

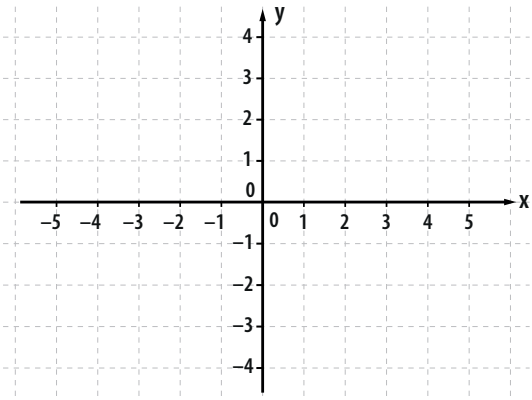
1

x	0	4		
y	–2	0		



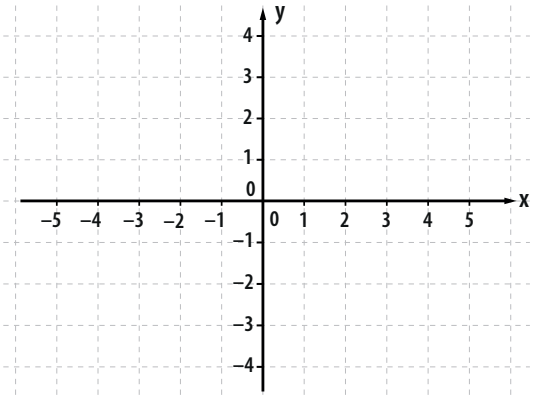
2

x	–3	4		
y	–2	–2		



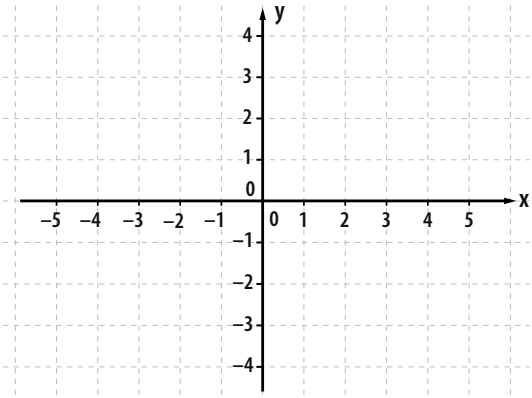
3

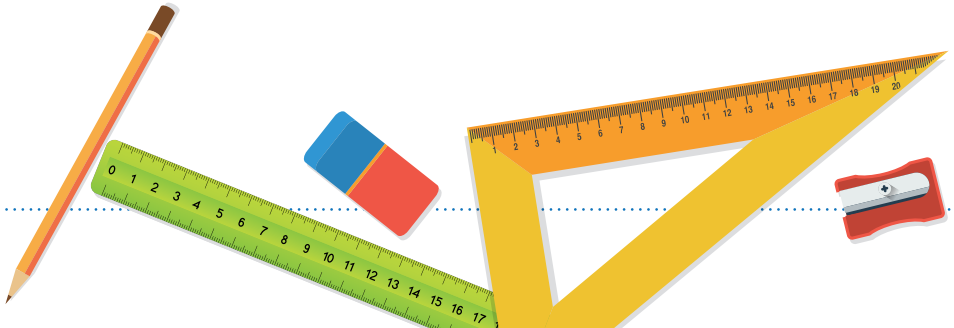
x	0,5	3		
y	1,5	5		



4

x	1	–2		
y	3	4		





Actividad 48

1 **Lea la siguiente información.**

Las funciones que tienen como gráfica una línea recta se pueden clasificar en dos tipos:

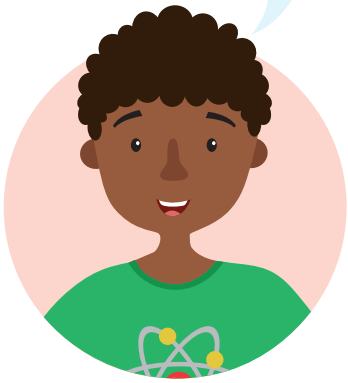
Funciones lineales: si la recta pasa por el origen del plano cartesiano. En este caso la función se puede escribir algebraicamente así:

$f(x) = mx$, donde m es una constante.

Funciones afines: si la recta no pasa por el origen del plano cartesiano. En este caso la función se puede escribir algebraicamente así:

$f(x) = mx + b$, donde m y b son constantes.

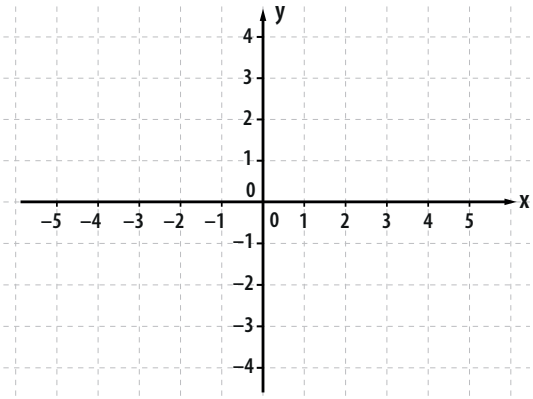
En lugar de escribir $f(x)$ podemos escribir y, pues $y = f(x)$



2 **Elabore la gráfica de las siguientes funciones y clasifíquelas en lineales o afines.**

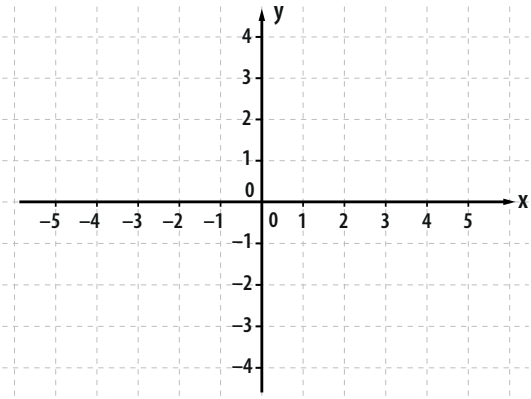
a) $y = 3x - 1$

x				
y				



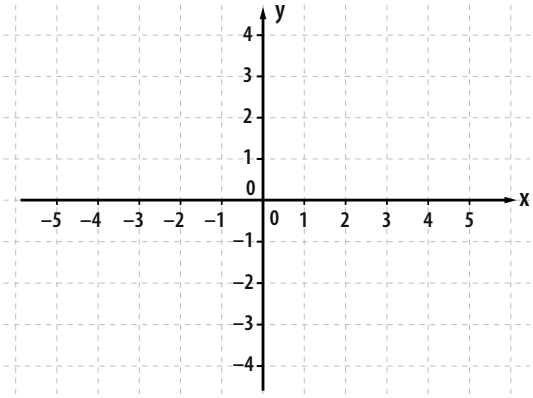
b) $f(x) = -2x - 4$

x				
y				



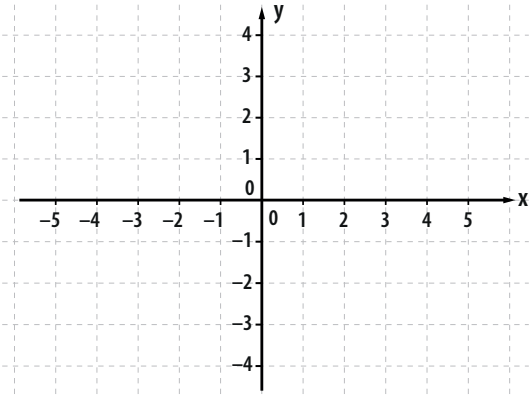
c) $y = -5x$

x				
y				



d) $f(x) = \frac{1}{2}x$

x				
y				



Actividad 49

1 **Lea la información y observe con atención el ejemplo.**

La pendiente indica las unidades que se inclina la recta; así en $y = -3x - 1$ la pendiente es -3, lo cual se puede escribir:

$$m = -3 = \frac{-3}{1}$$

Movimiento vertical (en el eje y, arriba o abajo).

Movimiento horizontal (en el eje x derecha).

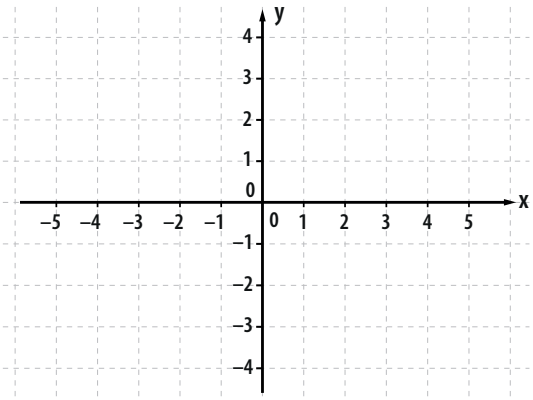
Así, es posible elaborar la gráfica de una línea recta teniendo en cuenta la pendiente y el y -intercepto

2 **Elabore las gráficas de cada una de las rectas usando la pendiente *y* el *y* intercepto.**

a) $y = 3x + 2$

$m =$ _____

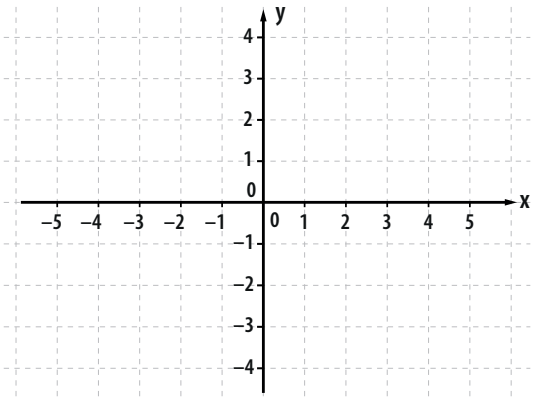
y – intercepto = _____



b) $y = -2x + 5$

$m =$ _____

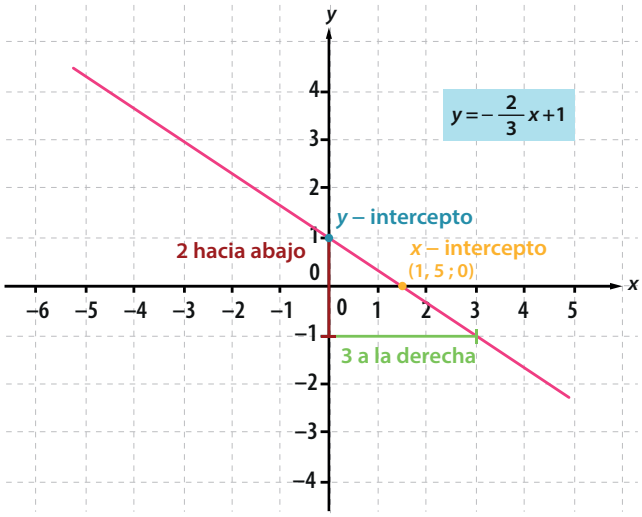
y – intercepto = _____



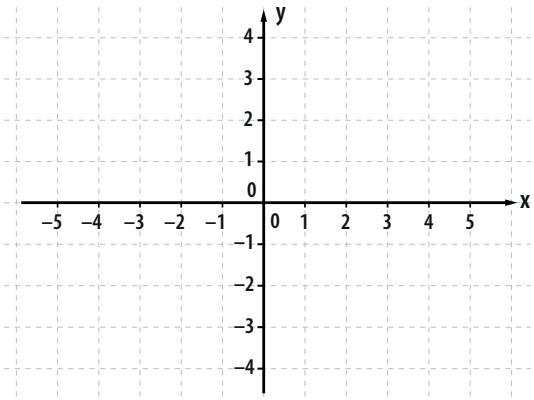
Clase 17

Actividad 50

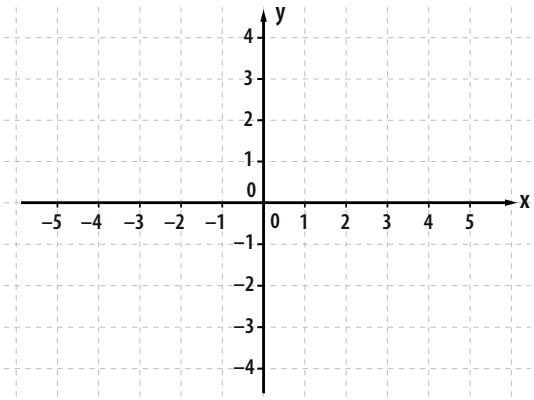
Realice las gráficas de las siguientes líneas rectas usando la pendiente *y* el *y* -intercepto. Luego, ubique sobre la gráfica el punto de corte con el eje de las *x* y escriba sus coordenadas. Observe el ejemplo.



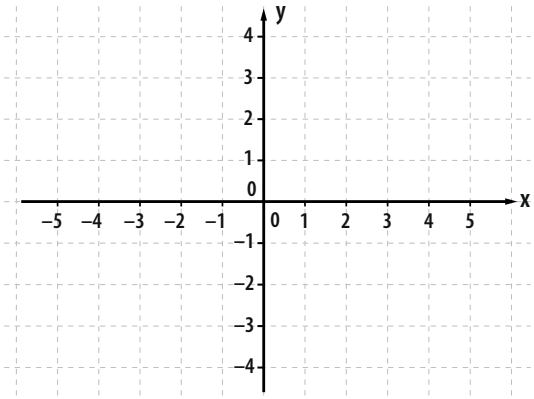
1 $y = \frac{1}{2}x + 2$



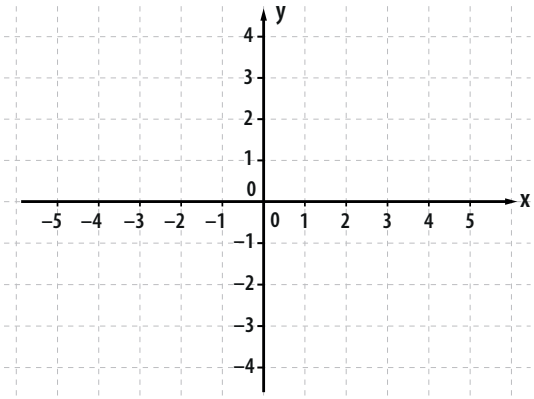
2 $y = -4x + 3$



3 $y = -\frac{5}{3}x + 2$



4 $y = -x - 2$



Actividad 51

Halle el punto de corte con el eje x (x - intercepto) de manera algebraica en cada una de las siguientes rectas.

No olvide que cuando la gráfica corta el eje x, el valor de y es cero.

$0 = mx + b$

1. $y = x - 1$

2. $y = 3x$

3. $y = 2x + 2$

4. $y = -3x + 2$

5. $y = 3x - 4$

Actividad 52

Dibuje en su cuaderno las rectas de la Actividad 51 y verifique que el punto de corte que halló algebraicamente coincide con el punto de corte que se ve en la gráfica.

Si tiene la posibilidad, use el programa *Geogebra* para realizar las gráficas.

Clase 18 Esta clase tiene video

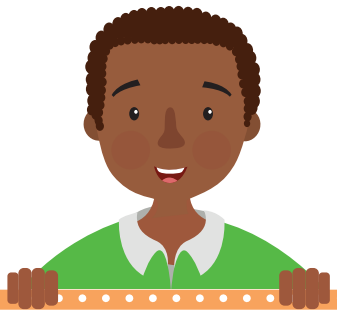
Actividad 53

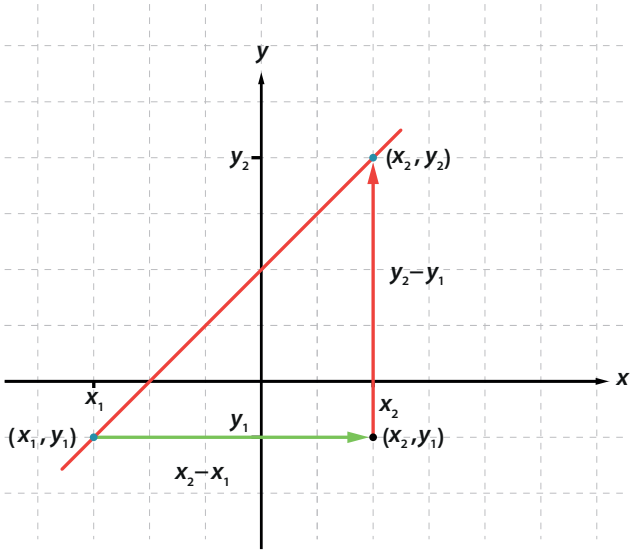
Lea la siguiente información.

Para calcular la pendiente de una recta que pasa por dos puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ se usa la siguiente expresión

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Esta se deduce a partir de la siguiente gráfica.



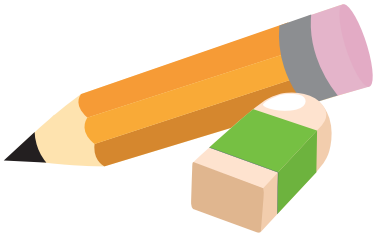


1. **Comente con sus compañeros lo que comprende de la gráfica y la expresión que define la pendiente. Escriba sus conclusiones a continuación.**

2. **Escriba en sus propias palabras qué es la pendiente de una recta.**

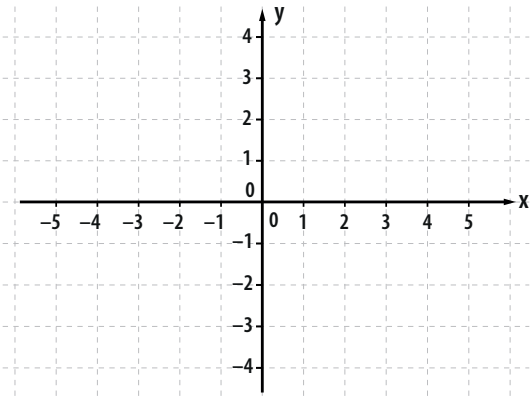
3. **Escriba el significado de la expresión: "esa carretera está muy pendiente".**

Actividad 54

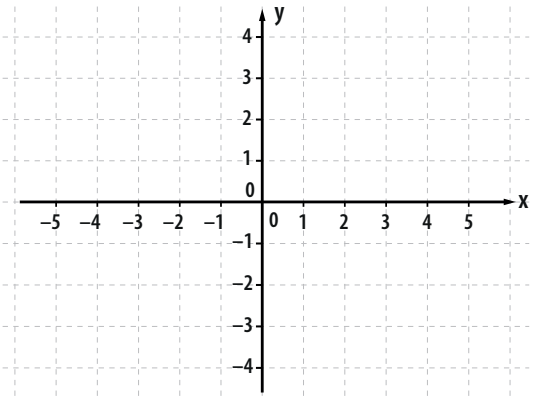


Encuentre la pendiente de la recta que pasa por los puntos dados. Luego, elabore la gráfica de la recta correspondiente.

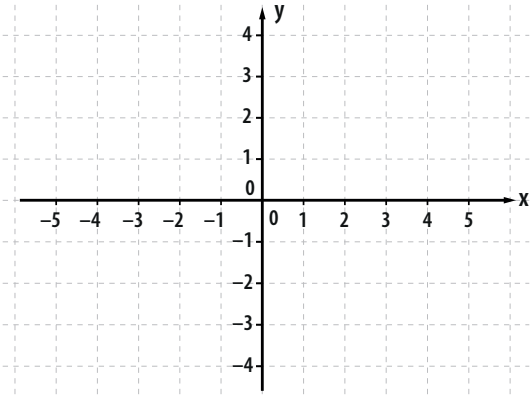
1 $M(2,3)$ y $P(-1,4)$



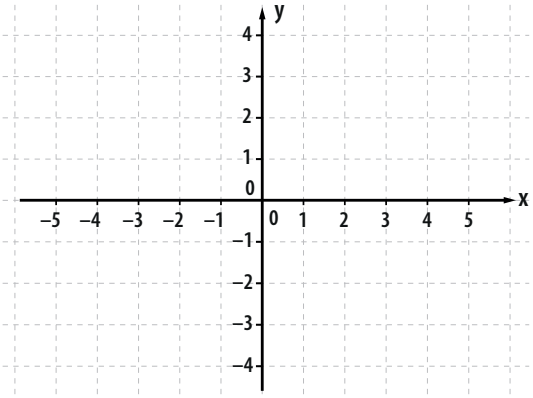
2 $T(-1,0)$ y $P(0,-3)$



3 $S(0,0)$ y $N(-2,-3)$



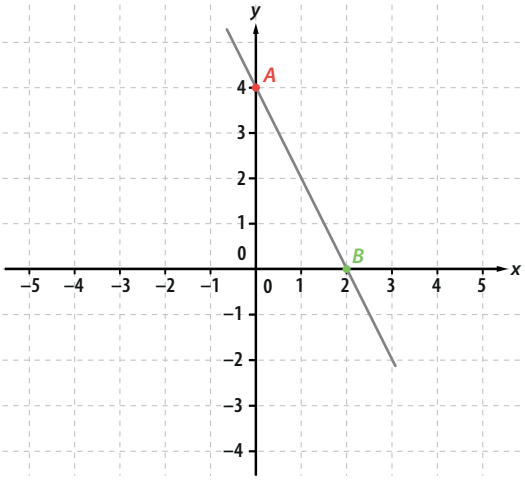
4 $L(3,0)$ y $P(0,3)$



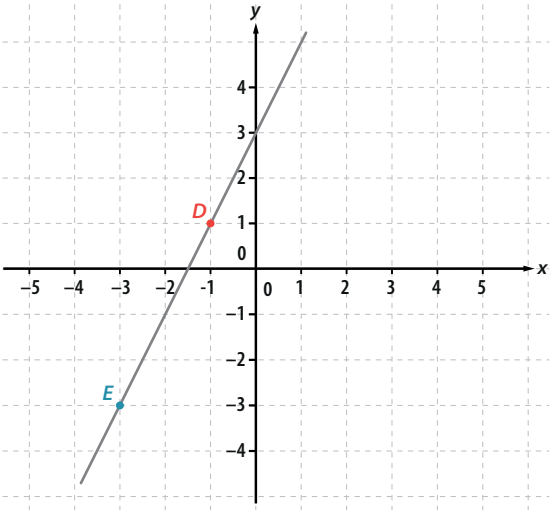
Actividad 55

Escriba las coordenadas de los puntos marcados sobre cada recta y halle la pendiente.

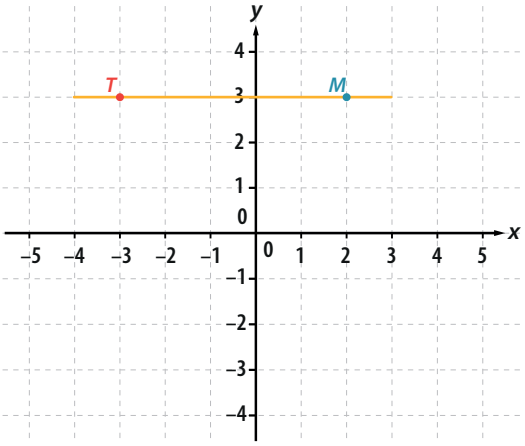
1



2



3



Clase 19

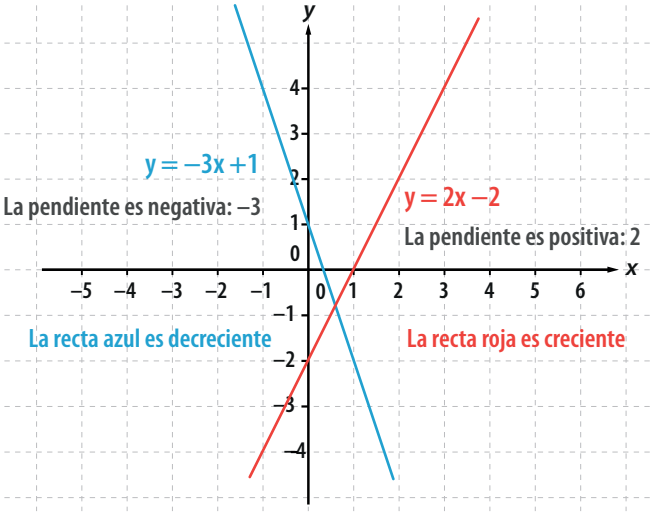
Actividad 56

1 **Lea la siguiente información y revise el ejemplo.**

Cuando la pendiente de una recta es positiva (+), se dice que la recta es creciente.

Cuando la pendiente de una recta es negativa (–), se dice que la recta es decreciente.

Por ejemplo, la recta $y = 2x - 2$ y la recta $y = -3x + 1$.



2 **Examine las siguientes rectas y determine si son crecientes o decrecientes.**

a) $y = -x + 1$

Escriba el valor de la pendiente $m =$ _____

La recta es _____

b) $y = 2x - 7$

Escriba el valor de la pendiente $m =$ _____

La recta es _____

c) $y = \frac{3}{4}x - 3$

Escriba el valor de la pendiente $m =$ _____

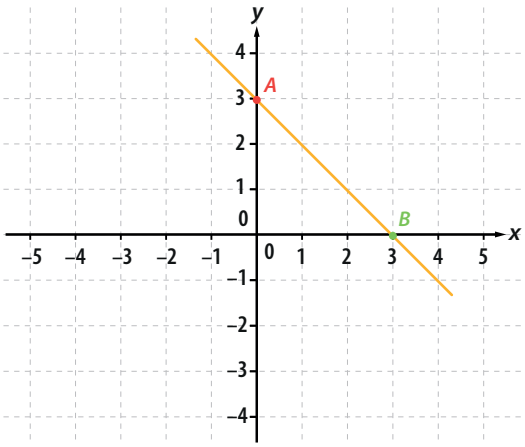
La recta es _____

Recuerde que en la ecuación de la recta el valor de la pendiente es el número que acompaña a *x*.

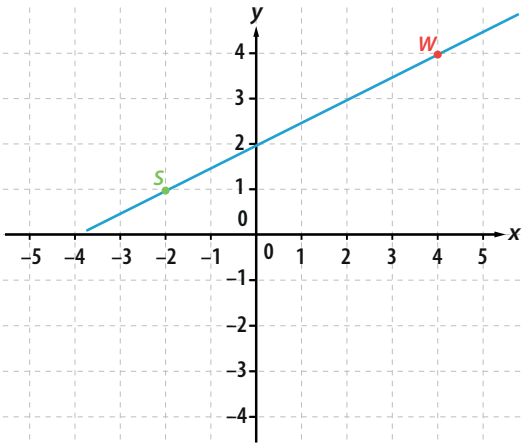
Actividad 57

1 **Calcule la pendiente de las rectas dadas y determine si son crecientes o decrecientes.**

a)



b)



2 **Calcule la pendiente de la recta dados los puntos. Determine si la recta es creciente o decreciente.**

a) $M(-1,-3)$ y $R(2,0)$

b) $D(2,-5)$ y $R(-2,3)$

Clase 20

Actividad 58

Las siguientes preguntas se refieren a la recta $y = -\frac{3}{4}x + 1$.

Lea con atención cada pregunta y marque con una equis (X) la respuesta que considere correcta.

1 Con relación a la pendiente de la recta se puede afirmar que:

A. Es negativa, por lo tanto la recta es creciente.

B. Es positiva, por lo tanto la recta es decreciente.

C. Es negativa, por lo tanto la recta es decreciente.

D. Es un número entero.

2 Dados los puntos $T(0,1)$ y $R(4,-2)$ se puede afirmar que:

A. Están sobre la recta mencionada.

B. No están sobre la recta mencionada.

C. Solo el punto T está sobre la recta mencionada.

D. Solo el punto R está sobre la recta mencionada.

3 Con respecto al y - intercepto de la recta mencionada, se puede afirmar que:

A. Es un entero negativo.

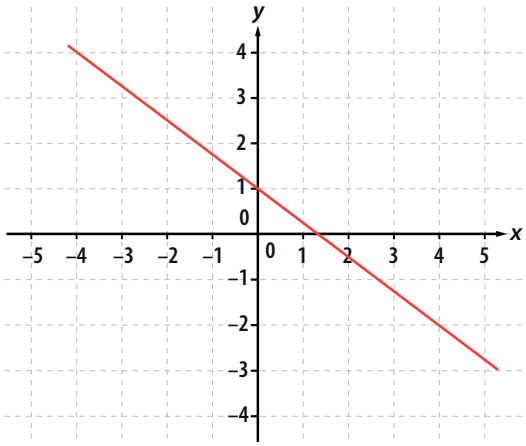
B. Determina que la recta es decreciente.

C. Tiene coordenadas (1, 0)

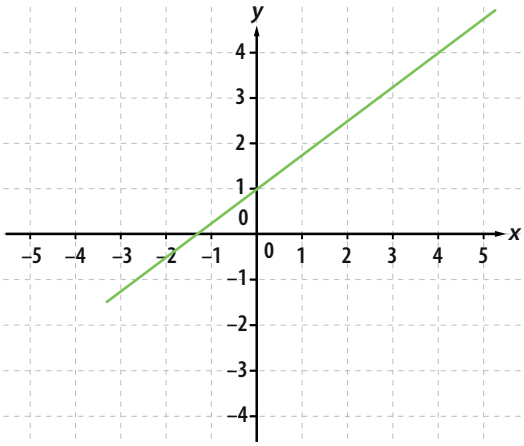
D. Tiene coordenadas (0, 1)

4 La gráfica de la recta mencionada es:

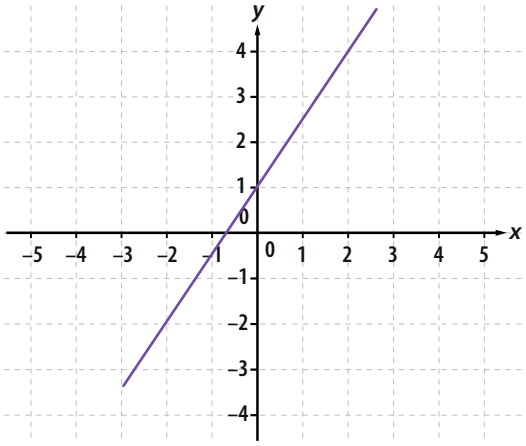
A.



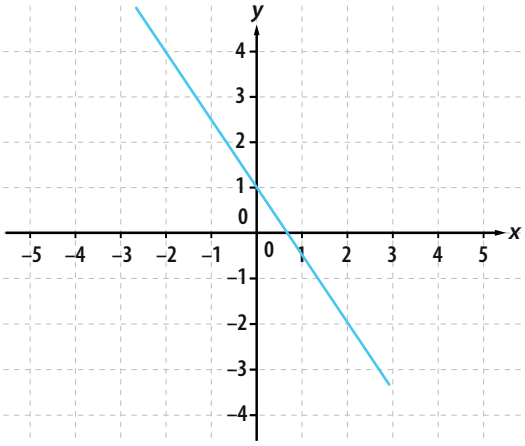
B.



C.



D.



Resumen

Una función se puede representar de las siguientes maneras:

- **Algebraica:** usando la fórmula.
- **Verbal:** escribiendo una oración para describirla.
- **Gráfica:** realizando su gráfica sobre el plano cartesiano.
- **Numérica:** usando la tabla de valores.

Una función **lineal** es de la forma $y = mx$

Una función **afín** es de la forma $y = mx + b$

En la ecuación $y = mx + b$, m es la pendiente y b es el y - intercepto.

Las coordenadas del y - intercepto son $(0, b)$

Las coordenadas de x - intercepto son $(-\frac{b}{m}, 0)$

La pendiente de la recta que pasa por los puntos de coordenadas $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ está dada por la expresión $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Cuando $m > 0$ la recta es **creciente**.

Cuando $m < 0$ la recta es **decreciente**.

Clase 21 Esta clase tiene video

Tema: Función lineal. Formas de la ecuación de la recta

Actividad 59

1 **Lea la siguiente información:**

Modelo de costo lineal

Cuando una empresa produce un artículo se presentan dos tipos de costos: los **fijos** y los **variables**.

- Los **costos fijos** son aquellos que se tienen independientemente de si se producen o no artículos: por ejemplo, el pago de servicios, de salarios, de arriendos, etc.
- Los **costos variables** dependen del nivel de producción, es decir, del número de artículos que se produzcan.

Teniendo en cuenta lo anterior, el costo total se puede representar con la siguiente expresión:

$$C_T = C_V + C_F$$

Donde C_T es el costo total, C_V y C_F son, respectivamente, el costo variable y el costo fijo.

Esta función recibe el nombre de modelo de costo lineal. Como es un modelo lineal, debe aplicar todo lo que aprendió en las clases anteriores.

Ahora, analicemos algunos aspectos de la expresión:

- Si consideramos que el costo variable C_V por artículo producido es constante, se tiene que C_V será **proporcional** al número de artículos producidos.
- Si llamamos m al C_V por unidad, tendremos que el C_V de producir x artículos (en pesos) será mx.
- Además, si llamamos b a C_F podemos plantear la siguiente función para calcular el costo total de producir x número de artículos:

$$C_T(x) = mx + b$$

Actividad 60

Resuelva las siguientes situaciones teniendo en cuenta la información de la página anterior.

El costo de producir 10 juegos de video al día es de 350 dólares, mientras que producir 30 juegos del mismo tipo al día cuestan 850 dólares. Si suponemos un modelo lineal como el descrito anteriormente, determine:

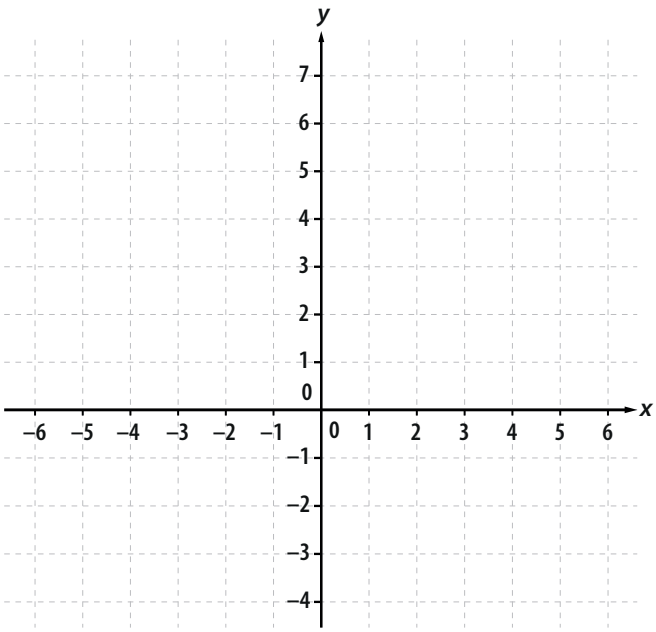
1 **El costo de producir un juego de video.**

2 **Si se ha establecido que los costos fijos diarios para esta empresa son de 100 dólares, encuentre la relación entre el costo total C(x) y el número *x* de juegos de video producidos.**

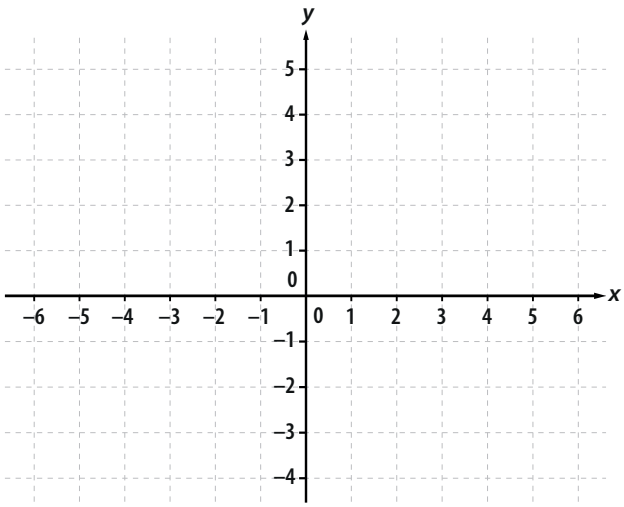
Actividad 61

1 **Trace la gráfica de cada una de las rectas que pasan por los puntos indicados, determine la pendiente, el intercepto con el eje y la ecuación de dichas rectas.**

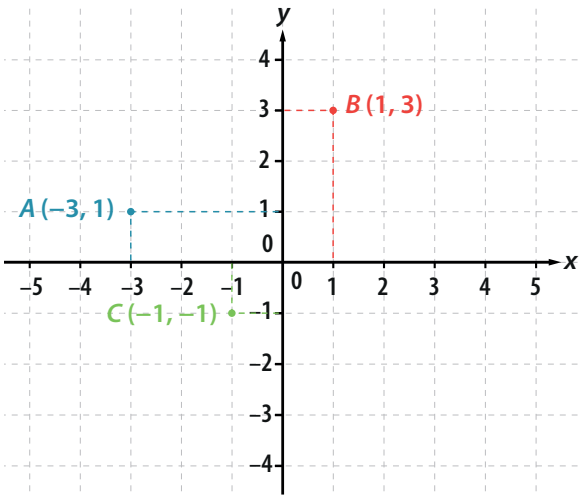
a) $P(2, 5)$ y $Q(4, 7)$



b) $P(-2, 1)$ y $Q(3, -4)$



2 **Considere la gráfica dada:**



a) Trace la recta que pasa por los puntos *A* y *B*. Determine su ecuación $y = mx + b$.

b) Trace la recta que pasa por los puntos *A* y *C*. Determine su ecuación $y = mx + b$.

c) Trace la recta que pasa por los puntos *B* y *C*. Determine su ecuación $y = mx + b$.

d) Trace la recta que pasa por los puntos *B* y el origen del plano cartesiano. Determine su ecuación $y = mx + b$.

Clase 22

Actividad 62

1 Lea y analice el ejemplo dado.
Una recta tiene pendiente $m = 3$ y pasa por el punto $M(-2, -1)$. Determine:

a) La ecuación de la recta.

Para hallar la ecuación de la recta, se realiza el siguiente procedimiento:

Paso 1. Se reemplaza m por 3 en la ecuación $y = mx + b$, obteniendo

$$y = 3x + b$$

Se observa que aún falta hallar b.

Paso 2. Para hallar b, se reemplazan las coordenadas del punto M en la ecuación anterior, así:

$$-1 = 3(-2) + b$$

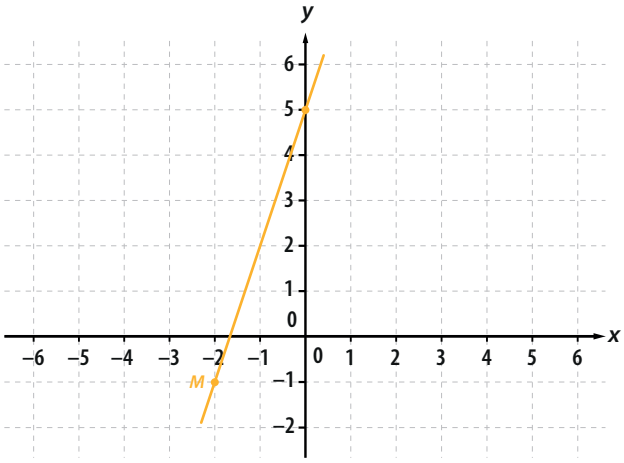
Se despeja b de esta ecuación, y se concluye que $b = 5$

Paso 3. Se escribe la ecuación de la recta.

$$y = 3x + 5$$

b) La grafica de la recta.

Para dibujar la recta, se ubica el y-intercepto, que en este caso es en (0, 5) y se hacen los desplazamientos que indica la pendiente.



2 En cada caso, halle la ecuación de la recta y elabore la gráfica.

a) $P(-3, -2)$ y $m = -2$

b) $P(-5, -4)$ y $m = \frac{3}{4}$

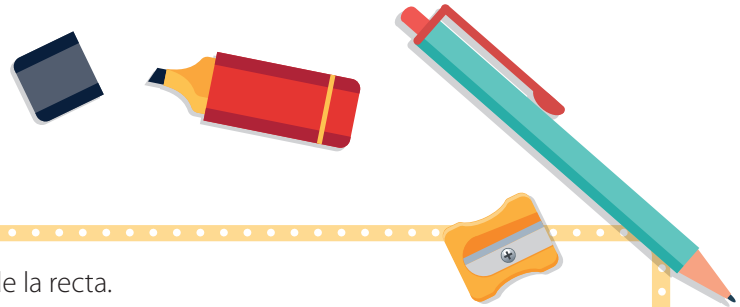
Actividad 63

La igualdad $y - y_1 = m(x - x_1)$ es la forma de la ecuación de una recta que pasa por un punto P de coordenadas (x_1, y_1) y tiene una pendiente m. Utilícela para determinar la ecuación de la recta en cada caso.

1. $P(6, -1)$ y $m = -\frac{1}{2}$

2. $P(3, 1)$ y $m = 7$

Clase 23



Actividad 64

1 Lea la siguiente información:

Es posible trabajar a partir de tres ecuaciones de la recta.

- **La primera**. Ecuación dada la pendiente m y la ordenada al origen b (y-intercepto); esta ecuación es conocida como ecuación pendiente y-intercepto y es la siguiente:

$$y = mx + b$$

- **La segunda**. Ecuación de una recta que pasa por un punto $P(x_1, y_1)$ y tiene una pendiente m. Esta ecuación se conoce como punto-pendiente y es la siguiente:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

- **La tercera**. Ecuación general de la recta o también llamada ecuación lineal de primer grado en dos variables. Esta ecuación es la siguiente:

$$Ax + By + C = 0 \qquad A, B \text{ no son simultáneamente cero.}$$

2 Lea con atención los siguientes ejemplos.

a) Hallar la ecuación general de la recta que pasa por (1, –3) y cuya pendiente es 2.

Para iniciar se usa la ecuación punto pendiente, así:

$y - (-3) = 2(x - 1)$	
$y + 3 = 2x - 2$	Eliminado paréntesis.
$y = 2x - 2 - 3$	Restando 3 en ambos lados de la igualdad.
$y = 2x - 5$	Reduciendo términos semejantes.
$2x - y - 5 = 0$	Igualando a 0 se obtiene la ecuación general.

b) Encontrar la pendiente y el y - intercepto de la recta cuya ecuación general es: $4x - y + 5 = 0$

Despejando y en $4x - y + 5 = 0$ obtenemos la ecuación $y = 4x + 5$ que nos permite concluir que la pendiente es 4 y el y-intercepto es 5.

Actividad 64

1 Dada la recta $y = 5x - 4$.

a) Determine la pendiente y el y - intercepto.

b) Halle la ecuación general de la recta.

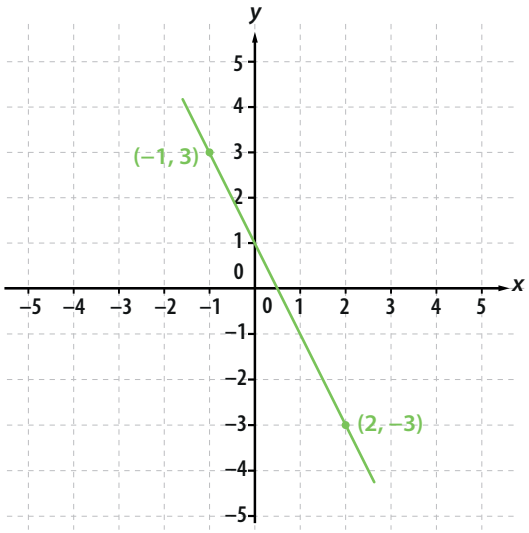
2 **La ecuación $2x - 3y - 12 = 0$ es la ecuación general de una recta.**

a) Escriba la ecuación en forma pendiente *y*-intercepto.

b) Elabore la tabla de valores de la recta del literal anterior y trace la gráfica.

x			
y			

3 **Encuentre la ecuación general de la recta que se muestra en la gráfica dada.**



Clase 24 Esta clase tiene video

Actividad 66

1 **Dos rectas tienen como ecuaciones $y = 2x + 1$ y $y = 2x + 5$ respectivamente.**
A continuación responda las preguntas formuladas y siga las instrucciones dadas.

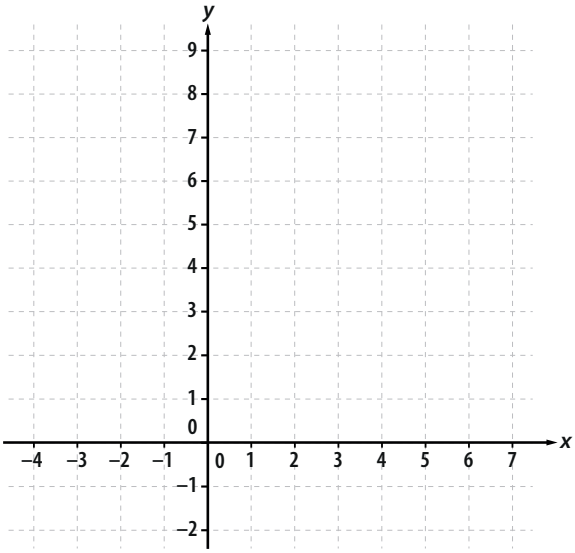
a) ¿Cómo son las pendientes de las dos rectas?

b) Complete las tablas:

$y = 2x + 1$	
x	y
1	
2	

$y = 2x + 5$	
x	y
1	
2	

c) Grafique las dos rectas sobre el siguiente plano.



d) ¿Cómo son las dos rectas anteriores, paralelas o perpendiculares? _____

e) Analice las ecuaciones de las rectas, sus pendientes, sus puntos de corte con el eje y sus respectivas gráficas y escriba una conclusión que permita determinar gráfica y analíticamente cuándo dos rectas son paralelas.

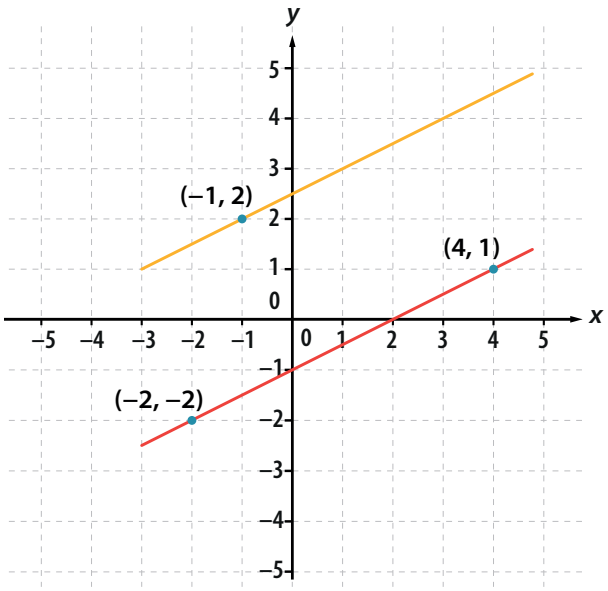
2 **Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto (3, 1) y es paralela a la recta de ecuación $y = 4x - 3$.**

Actividad 67

Determine la ecuación de la recta que cumpla las condiciones dadas en cada caso.

1 **Pasa por (2, 3) y es paralela a la recta $2x - y + 3$.**

2 **Pasa por (–1, 2) y es paralela a la recta que pasa por los puntos (–2, –2) y por (4, 1) tal como se muestra en la siguiente gráfica.**

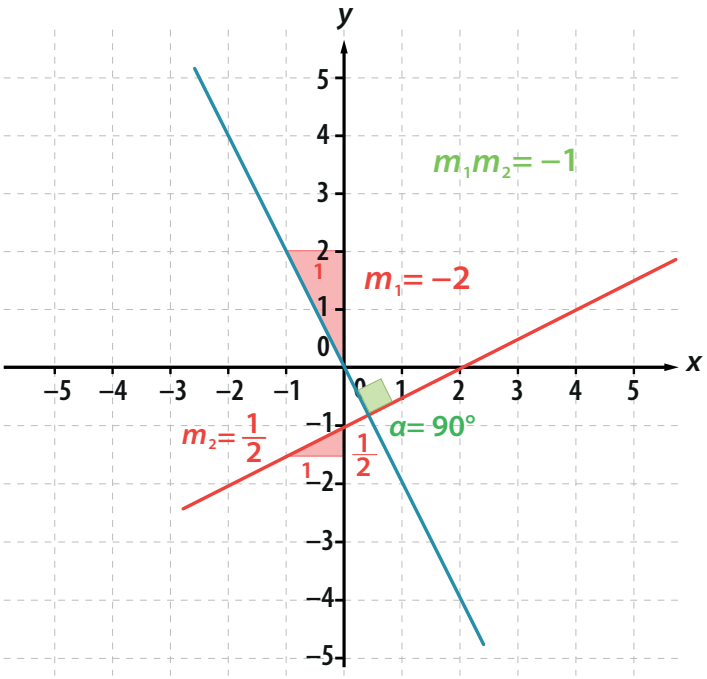


Clase 25

Actividad 68

1 Lea la siguiente información.

Dos rectas **son perpendiculares si y sólo si** el producto de sus pendientes es igual a –1.



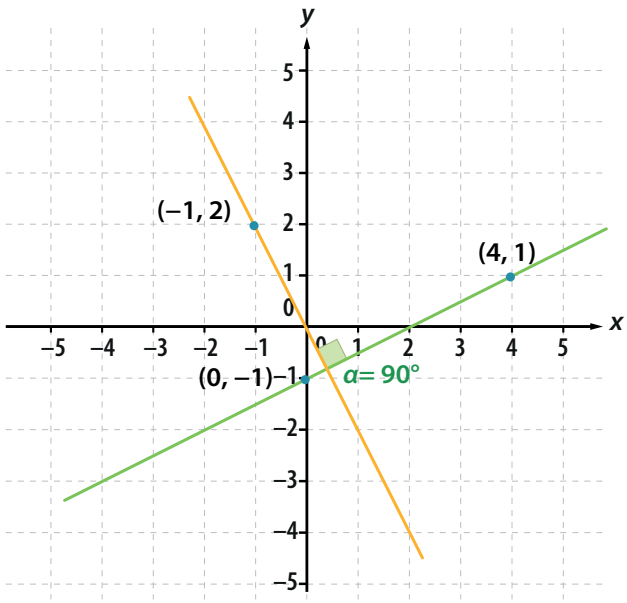
2 Encuentre la ecuación de la recta que pasa por (1, 4) y es perpendicular a la recta de ecuación $y = 2x - 3$.

Actividad 69

Determine la ecuación de la recta que cumpla las condiciones dadas en cada caso.

1 **Pasa por (2, 3) y es perpendicular a la recta $3x - y + 2$.**

2 **Pasa por (–1, 2) y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos (0, –1) y por (4, 1) tal como se muestra en la gráfica siguiente.**



Resumen

Ecuación de la recta

Para determinar la ecuación de una recta, se necesita conocer dos condiciones. Las dos condiciones pueden ser por ejemplo, un punto de la recta y la pendiente, la pendiente y la ordenada al origen o dos puntos por donde pasa la recta.

Veamos ahora algunas de las formas de la ecuación de la recta:

1. **Punto-Pendiente.** La ecuación de la recta que pasa por el punto $P(x_1, y_1)$ y cuya pendiente sea m es:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

2. **Pendiente-ordenada al origen.** La ecuación de la recta de pendiente m y que corta al eje y en el punto $(0, b)$ (siendo b la ordenada al origen) es:

$$y = mx + b$$

3. **Dos puntos.** La ecuación de la recta que pasa por los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ es:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \text{ o } y - y_2 = m(x - x_2) \text{ con } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

según utilicemos el punto $P(x_1, y_1)$ o $Q(x_2, y_2)$

4. **Ecuación general.** Una ecuación lineal o de primer grado en las variables x, y es de la forma:

$$Ax + By + C = 0 \quad A, B, C \text{ son números reales.}$$

Rectas Paralelas – Rectas Perpendiculares

1. Dos rectas son **paralelas** sólo si sus pendientes son iguales.
2. Dos rectas son **perpendiculares** sólo si el producto de sus pendientes es igual a –1.

Clase 26 Esta clase tiene video

Tema: Experimentos aleatorios

Actividad 70

1 **Lea la siguiente información:**

Un experimento aleatorio es un ensayo o una acción en la cual se conoce el procedimiento que se debe seguir y los posibles resultados que se pueden presentar. Sin embargo, no se puede predecir con certeza el resultado final hasta que se realice.

Si lanzo la pelota de baloncesto, sé que puedo encestar o no encestar.

¡Claro! Como no se sabe que pasará hasta que sea el lanzamiento, entonces es un experimento aleatorio.

2 **Lea con atención cada situación y escriba si se puede considerar como un experimento aleatorio. Justifique su respuesta.**

a) Lanzar una moneda de $500.

b) Hallar el área de un hexágono regular.

c) Sacar una J de picas de una baraja de cartas.

d) Resolver una ecuación.

e) Llegar a tiempo a la clase de matemáticas que es a las 8 de la mañana.

Actividad 71

1 Observe cómo Mariano halló el espacio muestral del experimento que consiste en lanzar dos monedas.

Primera opción

Segunda opción

Tercera opción

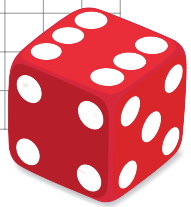
Cuarta opción

En conclusión: S = {(*sello*, *cara*), (*sello*, *sello*), (*cara*, *cara*), (*cara*, *sello*)}

2 Escriba los resultados de los siguientes experimentos aleatorios.

a) Lanzar un dado de seis caras.

b) Lanzar una moneda y un dado de seis caras al mismo tiempo.



Actividad 72

Lea con atención cada situación. Luego escriba el espacio muestral y responda las preguntas.

1 **Calixto va a elaborar una bandera con tres franjas y tiene tela de tres colores: verde, amarillo y rojo. Dibuje el espacio muestral que define todas las banderas que puede formar. Tenga en cuenta que dos franjas seguidas no pueden tener el mismo color.**

2 **Juan, Federico, Daniel y Gabriel se deben organizar en parejas para presentar su examen de matemáticas. La profesora pone los nombres de los cuatro en una bolsa y forma las parejas aleatoriamente.**

a) Escriba las parejas que se pueden formar.

b) ¿Cuántas parejas diferentes se pueden formar? _____

c) ¿Es posible que Federico presente el examen con Daniel? Explique su respuesta.

d) Si la profesora decide que solo elegirá aleatoriamente la pareja de Juan, ¿cuál será el espacio muestral de la nueva situación?

Actividad 73

Lea los elementos en cada espacio muestral y luego, responda la pregunta relacionada con el evento mencionado.

La entrenadora de gimnasia va a formar parejas entre Lucía (L), Camila (C), Juliana (J), Amanda (A). Las opciones que tiene se muestran en el siguiente conjunto:

$$S = \{(L, C), (L, J), (L, A), (C, J), (C, A), (J, A)\}$$

1. **¿Cuáles son las opciones del evento que consiste en que Amanda haga parte de una de las parejas?**

2. **¿Cuáles son las opciones del evento que consiste en que Juliana haga parte de una de las parejas?**

3. **¿Cuáles son las opciones del evento que consiste en que Camila haga parte de una de las parejas?**

4. **¿Cuáles son las opciones del evento que consiste en que Juliana no haga parte de una de las parejas?**

5. **¿Cuáles son las opciones del evento que consiste en que ni Camila ni Amanda haga parte de una de las parejas?**

Clase 27

Tema: Probabilidad de eventos simples

Actividad 74

1 **Lea la siguiente información.**

En el lenguaje cotidiano se suele hacer uso de palabras que involucran la posibilidad de que algo ocurra.

Las personas usan este tipo de expresiones teniendo en cuenta la certeza que tienen sobre un suceso o el convencimiento de que es muy difícil que pase.

Dentro de estas expresiones encontramos las siguientes:

- Es **seguro** que pase el examen.
- Es **poco probable** que pase el bus.
- Es **imposible** llegar a tiempo.
- Es **muy probable** que mi equipo quede campeón.

2 **Escriba oraciones de su vida diaria en las cuales involucre las expresiones dadas a continuación:**

a) Casi imposible.

b) Muy probable.

c) Poco probable.

d) Imposible.

e) Igualmente probable.

Actividad 75

Recuerde que:

$$P(A) = \frac{\#(A)}{\#(S)}$$

Lea cada situación y determine la probabilidad de ocurrencia de cada evento.

1 En 8A hay 42 estudiantes. De ellos se sabe que:

- 5 usan gafas.
- hay 27 mujeres.
- 36 son chocoanos.
- a 32 les gusta las matemáticas.

Si se elige un estudiante aleatoriamente, halle la probabilidad de cada evento.

a) Elegir un estudiante que no sea chocoano.

b) Elegir un hombre.

c) Elegir un estudiante que use gafas.

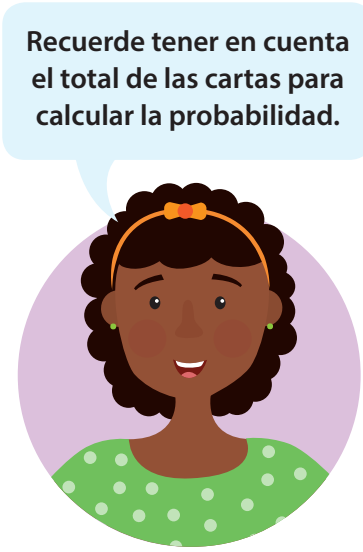
d) Elegir un estudiante al que no le guste las matemáticas.

2 **En las cartas de póker hay las siguientes figuras: picas, tréboles, diamantes y corazones. De cada figura hay 13 cartas que son As, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K.**

a) ¿Cuántas cartas tiene un póker?

b) Si se elige aleatoriamente una carta, ¿qué probabilidad hay de que sea una K?

c) Si se elige aleatoriamente una carta, ¿qué probabilidad hay de que sea de diamante?



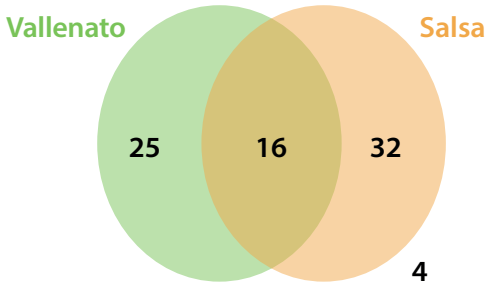
d) Si se elige aleatoriamente una carta, ¿qué probabilidad hay de que sea un 6 de tréboles?

Actividad 76

Observe el diagrama o la tabla y responda las preguntas teniendo en cuenta la información.

1 **Matilde preguntó entre sus estudiantes las preferencias musicales; encontró que los géneros que más les gustan son el vallenato y la salsa. La información la representó en el siguiente diagrama:**

Estudiantes de octavo grado



a) ¿A cuántos estudiantes le preguntó Matilde?

b) ¿A cuántos estudiantes les gusta la salsa y el vallenato?

c) ¿Qué género cree que le gusta a los estudiantes que no prefieren ni la salsa ni el vallenato?

Si todas las elecciones son aleatorias, halle las siguientes probabilidades.

d) El estudiante elegido le guste **únicamente** el vallenato.

e) El estudiante elegido le guste **únicamente** la salsa.

f) El estudiante elegido le guste el vallenato.

g) El estudiante elegido le gusten los dos géneros musicales.

h) El estudiante elegido no le guste ni la salsa ni el vallenato.

2 **A un grupo de turistas que visitó Bahía Solano se les preguntó por los aspectos que consideraron excelentes en su estadía. La información se clasificó por género y se registró en la siguiente tabla.**

Aspecto

Género	Comida	Paisaje	Atención	Total
Mujeres	22	32	21	
Hombres	24	28	27	
Total				

Complete las filas y las columnas de la tabla con los respectivos totales.

a) ¿Cuántas personas opinaron que la comida fue excelente? _____

b) ¿Cuántos hombres opinaron que la atención fue excelente? _____

c) ¿Cuántos de los turistas eran mujeres? _____

d) ¿Cuántos de los turistas opinaron que el paisaje fue excelente? _____

Si se selecciona aleatoriamente un turista, calcule las siguientes probabilidades:

e) Sea mujer y haya opinado que el paisaje fue excelente.

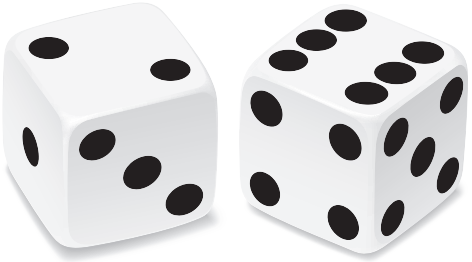
f Sea hombre y haya opinado que la atención fue excelente.

g Haya opinado que la comida fue excelente.

h) Sea mujer.

Actividad 77

Pablo y Carolina juegan a lanzar dos dados y ver los resultados en la cara superior de cada uno.



1 **Escriba el espacio muestral que reúne los posibles resultados que obtendrán Pablo y Carolina.**

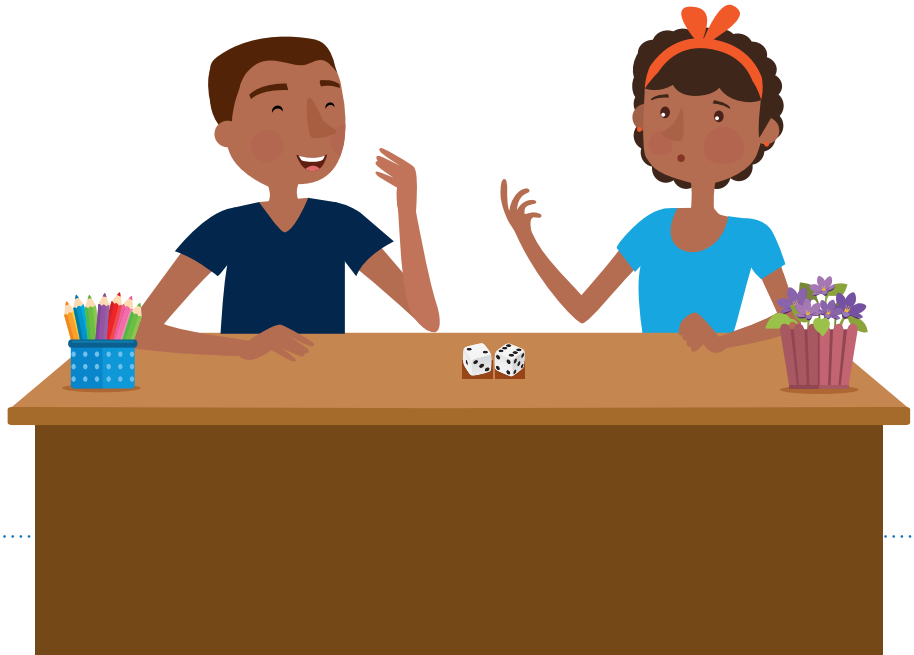
2 ¿Cuál es la probabilidad de que el resultado sea que los dos dados cayeron en el mismo número?

3 Escriba todos los elementos del espacio muestral en los cuales la suma de los números es un número par.

4 ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los números sea par?

5 Escriba todos los elementos del espacio muestral en los cuales la suma de los números es un número mayor que 6.

6 ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los números sea mayor que 6?



Clase 28

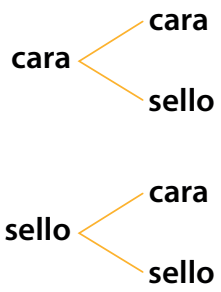
Tema: Diagrama de árbol

Actividad 78

1 **Lea la siguiente información.**

Un diagrama de árbol es un esquema que se usa para enumerar todas las posibilidades de una secuencia de eventos.

Al lanzar dos monedas, el diagrama de árbol es el siguiente:

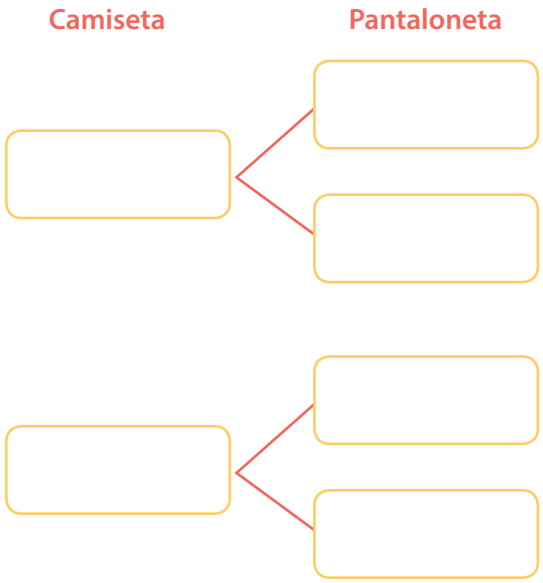


El espacio muestral del experimento que consiste en lanzar dos monedas simultáneamente, se puede escribir a partir del diagrama de árbol.

S = {(*cara*, *cara*); (*cara*, *sello*); (*sello*, *cara*); (*sello*, *sello*)}

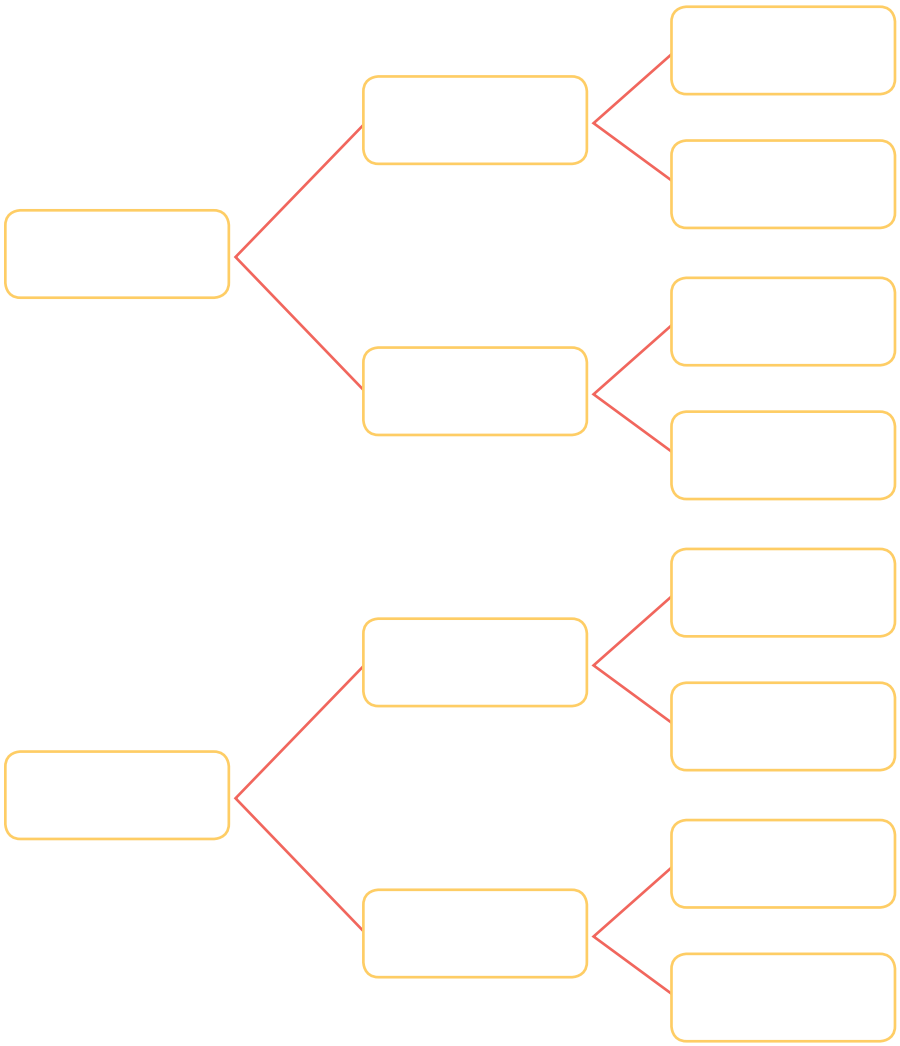
2 **Complete el diagrama de árbol y escriba el espacio muestral que se genera.**

Luis tiene una camiseta roja y una camiseta verde; también tiene una pantaloneta azul y una pantaloneta negra.



Actividad 79

1 Complete el diagrama de árbol que muestra las posibilidades al lanzar tres monedas.



2 Escriba el espacio muestral del experimento que consiste en lanzar tres monedas.

3 ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar tres monedas dos de ellas caigan cara?

Clase 29

Tema: Muestra, población. Orden y repetición

Actividad 80

En cada experimento aleatorio identifique cuál es la muestra, cuál es la población.

1. **El mago que anima la fiesta hace un truco con las cartas de un póker que consiste en seleccionar 5 cartas aleatoriamente.**

   Población: _____

   Muestra: _____

2. **El profesor de matemáticas hace un juego de cálculo con sus estudiantes y le pide a cada uno de ellos que piense un número de dos cifras.**

   Población: _____

   Muestra: _____

3. **Claudia pone dentro de una bolsa 5 bolas de colores: dos rojas, dos verdes y una blanca. Manuel saca, aleatoriamente, tres bolas de la bolsa.**

   Población: _____

   Muestra: _____

Actividad 81

1. **Lea la siguiente información.**

Cuando en un experimento aleatorio es importante el orden en el que se seleccionan los elementos de la muestra, se dice que es ordenado.

Por ejemplo, el experimento aleatorio que consiste en participar en una carrera de velocidad es ordenado, ya que no es igual llegar primero o llegar segundo.

2 **Camilo, Pedro, Javier y Felipe participan en la prueba de 100 metros. El primero en llegar ganará una consola de videojuegos, el segundo una *Tablet* y el tercero un bono de un restaurante.**

a) Escriba todas las posibilidades (el espacio muestral) que muestran el orden en el que pueden llegar los cuatro competidores.

Tenga en cuenta que hay 24 maneras diferentes en las que pueden llegar los competidores.

b) ¿Qué probabilidad hay de que Felipe gane la consola de video juegos?

c) ¿Qué probabilidad hay de que Camilo gane la *Tablet*?

d) ¿Todos los competidores tienen la misma probabilidad de ganar la carrera? Justifique su respuesta haciendo los cálculos de la probabilidad.

e) Suponga que Pedro decidió a última hora no participar en la carrera. ¿Esta decisión cambia la probabilidad de ganar para los otros competidores? ¿Por qué?

Clase 30

Tema: Muestra, población. Orden y repetición

Actividad 82

1 **Lea la siguiente información.**

Cuando en un experimento aleatorio es posible repetir varias veces un resultado, se dice que hay repetición.

Por ejemplo, en el experimento aleatorio que consiste en lanzar dos monedas hay repetición pues las opciones *cara* y *sello* se pueden presentar varias veces.

2 **Observe el espacio muestral del experimento que consiste en formar un número de dos dígitos con los números 1, 2 y 3. En este experimento hay repetición.**

Los números pueden ser :

- Iniciando en 1: 11, 12, 13.
- Iniciando en 2: 21, 22, 23.
- Iniciando en 3: 31, 32, 33

S = {11, 12, 13, 22, 21, 23, 33, 31, 32}

3 **Encuentre el espacio muestral del experimento aleatorio que consiste formar un número de tres cifras con los números 4, 5 y 6.**

a) ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar un número de tres cifras iguales entre los números anteriores?

Actividad 83

1 Se deben escribir palabras de cuatro letras con las letras mostradas.

A R M O

a) Si se quiere que las palabras tengan "significado" en el español, ¿es posible que la situación sea con repetición? Explique su respuesta.

b) ¿Cuántas palabras con significado en el español, se pueden armar con las cuatro letras diferentes? Escriba las opciones.

c) Si el experimento aleatorio consiste en armar palabras con significado en español, ¿cuál es la probabilidad que al seleccionar una palabra, esta inicie con una consonante?

2 Sofía quiere formar números de dos cifras usando todos los números dígitos.

a) ¿Cuántos números puede formar?

b) ¿Cuántos de esos números son pares?

c) ¿Cuál sería la probabilidad de seleccionar aleatoriamente un número terminado en 5?

Actividad 83

Maribel va a un restaurante y le entregan la siguiente carta con los platos del día.

1. **Maribel puede elegir una entrada, un plato fuerte, un acompañamiento y un postre; ella sabe que tiene 81 posibilidades diferentes. Escriba 10 de las opciones que tiene para su comida.**

2. **¿En cuántas de las 81 opciones que tiene Maribel el plato fuerte es pollo en salsa agridulce?**

3. **¿Cuál es la probabilidad de que Maribel coma pollo con salsa agridulce?**